آماده سازی حالتهای کوانتوم مکانیکی

رسول رکنی‌زاده
دانشگاه اصفهان—گروه فیزیک

۱۹ خرداد ۱۳۸۲

۱ مقدمه

در تعبیر کاربردی و احتمالاتی در نظریهٔ‌کوانتومی، این سؤال مطرح است که چگونه می‌توان مطمئن بود که سیستم درست پیش از اندازه‌گیری در حالت خاصی است. این امر مربوط به **آماده سازی حالت** و تحویل بردار حالت است.
یک اندازه‌گیری عبارت است از کنشی روی سیستم که حالت کوانتومی را درست قبل از اندازه‌گیری مورد بررسی قرار می‌دهد و یک عدد معین و قابل ثبت مربوط به کمیت مشاهده‌پذیر معین را بدست می‌دهد. از طرف دیگر آماده‌سازی حالت عملی است که هدف آن وادار کردن سیستم (یا هنگردی از آنها) به قرار گرفتن در حالت معینی درست بعد از عملیات است.
تفکیک اندازه گیری از آماده سازی بسیار مهم است. یک اندازه‌گیری غالباً در سیستم اختلال می‌کند (مثلاً وقتی یک فوتون یک شمارنده گایگر را فعال می‌کند، در این فرایند جذب میشود) یا آن را بدون آنکه از نظر فیزیکی مورد نظر باشد، به حال خود رها میکند (مثلاً وقتی یک الکترون با صفحهٔ عکاسی برخورد می‌کند در بین الکترونهای امولسیون گم می‌شود). مع‌الوصف این هیچ ربطی به پیشگویی‌های احتمالاتی نتایج اندازه‌گیری ندارد. ازطرف دیگر جنبهٔ محوری در آماده‌سازی حالت آن است که نه فقط اختلالی در سیستم ایجاد نمی‌شود ، بلکه سیستم یا مجتمعی

از سیستم‌ها (یا آنچه برای اندازه‌گیری‌های مکرر تهیه می‌شود) در یک حالت خاص باقی می‌ماند. در عمل، آماده‌سازی حالت‌ها اندازه‌گیری به معنی مرسوم آن نیست.
مفهوم آماده‌سازی حالت با ایدهٔ تحویل حالت مربوط است. فرض کنید A یک مشاهده‌پذیر باشد که دارای ویژه‌مقادیر $(a_1, \cdots, a_M)$ میباشد که گسسته و غیر تبهگن‌اند. یک عمل روی یک مجموعهٔ $\mathcal{E}$ از سیستم‌های فیزیکی **آماده‌سازی حالت برای** A نامیده می‌شود اگر به یک افراز $\mathcal{E}$ به زیرمجموعه‌های $\mathcal{E}_m$ منجر شود طوری که برای هر $m = 1, 2, \cdots, M$ یک اندازه‌گیری A بیدرنگ بعد از آماده‌سازی حتماً نتیجهٔ a_m را روی سیستم در زیر مجموعهٔ $\mathcal{E}_m$ بدهد.
اگر عملیات یک اندازه‌گیری واقعی باشد، آنگاه آنرا یک **اندازه گیری ایده‌ال از** A می‌نامند. به عنوان مثال یک باریکه از اتمهای نقره را که از دستگاه اشترن— گرلاخ عبور می کند در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم میدان مغناطیسی در جهت محور z باشد. فرض می‌کنیم در پشت دستگاه فیلترهایی وجود داشته باشد که اسپین بالا و پایین را از هم جدا می‌کند . بنابراین هر اندازه‌گیری S_z روی اتمها که از فیلتر بالایی عبور کرده‌اند، مقدار $\hbar/2$ و آنهایی که از فیلتر پایین عبور می‌کنند $-\hbar/2$ است. پیداست آماده‌سازی حالت، در اندازه‌گیری بعدی S_z انجام می‌شود.
حال فرض می‌کنیم فقط آن سیستم‌هایی را انتخاب کنیم که در زیر مجموعهٔ خاص $\mathcal{E}_m$ قرار دارند. آنگاه اندازه‌گیری‌های A روی سیستم‌ها در $\mathcal{E}_m$ لزوماً نتیجهٔ a_m را بدست می‌دهد. با این وجود تنها حالتی که با احتمال ۱ قابل پیشگویی است، یک ویژه‌بردار عملگر مربوطه است و اگر ویژه‌مقدار غیر تبهگن باشد(بنابه فرض) این ویژه‌بردار (غیر از یک فاکتور فاز) یگانه است. بنابراین ما در این فرایند به یک مجموعه از سیستم ها (یعنی مجموعهٔ $\mathcal{E}_m$) می‌رسیم که حالت کوانتومی آنها لزوماً ویژه‌بردار $|a_m\rangle$ است یعنی این برداری است که نتایج احتمالاتی درستی از هر اندازه‌گیری بعدی که روی سیستم‌های موجود در $\mathcal{E}_m$ انجام شود، بدست می‌دهد. این روش اصلی در آماده سازی حالتهای کوانتوم مکانیکی است.
اگر چنین آماده‌سازی حالت A روی مجموعهٔ $\mathcal{E}$ از سیستم‌ها انجام شود که قبلاً (یعنی در زمان بسیار کوتاهی پیش از اندازه‌گیری) در حالت خاص $|\psi\rangle$ آماده شده‌اند، آنگاه انتخاب زیر مجموعه به معنی آن است که حالت $|\psi\rangle$ برای $\mathcal{E}$ توسط حالت $|a_m\rangle$ برای $\mathcal{E}_m$ جایگزین شود. در این رویکرد به نظریهٔ کوانتومی، گذار

$$|\psi\rangle \to |a_m\rangle$$

یک **تحویل بردار حالت** نامیده می‌شود.

۲ آماده سازی حالتها

میدانیم حالتهای کوانتوم مکانیکی دارای مشخصهٔ موجی‌اند و ازاینرو پدیده‌های تداخل را از خود بروز می‌دهند. از فیزیک کلاسیک می‌دانیم که وضعیت‌های **همدوس** و **ناهمدوس** وجوددارد. تابش الکترومغناطیسی، مانند نور مریی، تابش لیزر، امواج‌رادیویی و غیره، می تواند در شکل‌های کاملاً متفاوت ظاهرشود. نور می تواند کاملاً قطبیده، یا به طور جزیی قطبیده یا کاملاً غیر قطبیده باشد، بسته به اینکه چگونه آنرا تهیه کرده‌ایم. قطبش هنگامی ظاهر می‌شود که فقط یک مؤلفه قطبش وجود داشته باشد یا وقتی بین مؤلفه‌های مختلف رابطهٔ فازی ثابتی باشد؛ برعکس اگر هیچ قطبشی مطرح نباشد، گفته می شود مؤلفه ها ناهمدوس‌اند و بدون هیچ رابطهٔ فازی آمیخته می باشند.
کاملاً شبیه به رفتار نظریهٔ موجی کلاسیک در مکانیک کوانتومی پیش می‌آید. حالتهایی وجود دارند که بدون هر گونه محدودیتی قابلیت تداخل دارند و از اینرو نمایش تداخلی سازنده و ویرانگر که در مکانیک کوانتومی معمول است را از خود بروزمی دهند. هر یک از این حالت ها یک زیرفضای یک بعدی از فضای هیلبرت را می پوشانند، اما بهرحال با یک محدودیت: حالت را با صرفنظر از یک فاز ثابت می‌توان مشخص کرد. بنابراین حالت کوانتوم مکانیکی را از طریق **کلاس‌هم‌ارزی** توابع موج **پرتو واحد**(unit ray) توصیف می کنیم:

$$\{e^{i\sigma}\psi\}$$

این آزادی در انتخاب فاز وقتی که **برافکنش** به یک زیرفضای یک بعدی را بکار ببریم، به طور خودکار حذف می‌شود:

$$\mathbf{P}_\psi = \psi(\psi,\cdot) = |\psi\rangle\langle\psi|$$

مقدار منتظرهٔ یک مشاهده‌پذیر $\mathcal{O}$ در یک حالت تداخل پذیر(خالص) را قبلاً آموخته‌ایم. فرض می‌کنیم $\mathcal{O}$ کراندار باشد و یک سیستم راست هنجار φ_n وجود داشته باشد که فضای هیلبرت را می‌پوشاند. آنگاه:

$$\begin{aligned}\langle\mathcal{O}\rangle = (\psi,\mathcal{O}\psi) &= \left(\psi,\mathcal{O}\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n(\varphi_n,\psi)\right) = \sum_{n=1}^{\infty}(\varphi_n,\psi)(\psi,\mathcal{O}\varphi_n)\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}(\varphi_n,\mathbf{P}_\psi\mathcal{O}\varphi_n) = Tr\mathbf{P}_\psi\mathcal{O}\end{aligned}$$

حال اگر A مشاهده پذیر دیگری باشد، که به طور ایده‌آل یک چشمه (Sources) را توصیف کند، و فرض کنیم α یکی از ویژه‌مقادیر آن باشد، حالت ψ از این طریق بوجود می‌آید که

اندازه‌گیری A انجام شود و ویژه‌مقدار ثابت α ثبت گردد. اگر عملگر برافکنشی را، که روی زیر فضای هیلبرت با ویژه‌مقدار α تصویر می‌کند، با $\mathbf{P}_\alpha$ نشان داده میشود. بنابراین موارد مختلف و بدیل زیر را باید در نظر گرفت:

۱) ویژه مقدار α تبهگن نیست. در این مورد بایستی $\mathbf{P}_\alpha = \mathbf{P}_\psi$ باشد یعنی حالت ψ برابر ویژه حالت φ_αی مشاهده‌پذیر A (مدول یک فاز ثابت) می باشد که به α متعلق است.

۲) ویژه مقدار α تبهگن است و دارای درجهٔ تبهگنی K_α می‌باشد. زیر فضای $\mathcal{H}_\alpha$، که $\mathbf{P}_\alpha$ روی آن تصویر می‌کند دارای بعد K_α است و از ویژه‌توابع $\{\varphi_{\alpha i}, i = ۱, ۲, \cdots, K_\alpha\}$ (یا یک سیستم پایهٔ دیگر که به طور یکانی هم‌ارز آن است) پوشیده می‌شود.

حال می پرسیم چگونه بایستی حالت آماده شدهٔ ψ به عبارت دیگر $\mathbf{P}_\psi$ را تنها از طریق اندازه‌گیری A و دسته بندی ویژه مقدار α توصیف نمود؟
می توان روابط زیر را به عنوان نقطهٔ شروع انتخاب کرد:

$$\mathbf{P}_\psi = \mathbf{P}_\chi, \quad \chi = \varphi_{\alpha j}, \quad \text{یا} \quad \chi = \sum_{i=۱}^{K_\alpha} \varphi_{\alpha i} c_i \tag{۱}$$

که در اینجا c_i اعداد مختلطی هستند که شرط بهنجارش $\sum_i |c_i|^۲ = ۱$ را برآورده می‌کنند. به سرعت می‌توان خود را قانع نمود که اینها نقاط شروع خوبی نیستند: حالتی که توسط $\mathbf{P}_\chi$ توصیف می‌شود دارای مؤلفه‌هایی با فاز ثابت است و ازاینرو مانند قبل دارای قابلیت تداخلی کامل است. لذا دارای اطلاعات بیشتری از آنچه ما از طریق اندازه‌گیری ارائه کرده‌ایم، می باشد.
با یک مثال این مفاهیم را روشن تر می‌کنیم. فرض می‌کنیم مایک ابزار ساخته ایم که ویژه‌مقدار $l(l+۱)$ مربوط به تکانهٔ زاویه‌ای مداری یک ذره را می‌تواند اندازه بگیرد و یک فیلتر قرارداده‌ایم که فقط ویژه‌مقدار $l = ۱$ را از خود عبور دهد (در واقع این ابزار چشمه‌ای برای تولید حالت خالص است). این چشمه حالتی را آماده می کند که فقط می دانیم در زیر فضای $\mathcal{H}_{l=۱}$ قرار دارد ولی چیز بیشتری نمیدانیم. هر برهم‌نهی همدوس حالت پایهٔ $Y_{۱m}$ به صورت $\chi = \sum_m Y_{۱m} c_m$ شامل اطلاعاتی در مورد جهت گیری فضایی تکانهٔ‌زاویه‌ای است. مثلاً χ با ضرایب

$$c_{+۱} = ۱/\sqrt{۲}, \quad c_۰ = ۰, \quad c_{-۱} = -۱/\sqrt{۲}$$

همزمان ویژه‌حالت مؤلفهٔ $\mathbf{l}_۱$ با ویژه‌مقدار $\mu = ۰$ است [۱]؛ در حالیکه اینرا در اندازه‌گیری آماده‌سازی خود مشخص نکرده‌ایم. همچنین حالت زیر را نیز می‌توان در نظر گرفت:

$$\chi = \frac{۱}{\sqrt{N}} \sum_{m=-۱,۰,+۱} Y_{۱m} c_m, \quad N = |c_{-۱}|^۲ + |c_۰|^۲ + |c_{+۱}|^۲$$

[۱] در اینجا $\hbar\mathbf{l} = \mathbf{L}$

که در آن $|c_{-1}| = |c_0| = |c_{+1}|$ را انتخات کرده‌ایم. اما این حالت شامل اطلاعات وابستگی فازی در مورد مقادیر چشم‌داشتی مؤلفه‌های $\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2, \mathbf{l}_3$ می‌باشد:

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{l}_3 \rangle_\chi &= \frac{1}{\sqrt{N}}(|c_{+1}|^2 - |c_{-1}|^2) = 0 \\
\langle \mathbf{l}_1 \rangle_\chi &= \frac{2}{\sqrt{N}}\mathbf{Re}(c^*_{+1}c_0 + c^*_0 c_{-1}) \\
\langle \mathbf{l}_2 \rangle_\chi &= \frac{2}{\sqrt{N}}\mathbf{Im}(c^*_{+1}c_0 + c^*_0 c_{-1})
\end{aligned}$$

که این نتیجه با درک شهودی ما در تناقض است. وقتی ما می‌خواهیم یک حالت را آماده کنیم که فقط می دانیم $l = 1$ است همهٔ جهات آن بایستی دارای ارزش یکسانی باشند و بنابراین ویژه‌مقادیر سه‌مؤلفه بایستی یکسان باشند و در واقع بایستی برابر با صفر باشند ، که می بینیم چنین نیست.

با این مثال مسئلهٔ اطلاعاتی که از طریق اندازه‌گیری در مورد حالت آماده شده می‌توان بدست آورد روشن می‌شود: وقتی در مورد حالت آماده شده فقط اطلاعات «α» در دسترس است، آنگاه بایستی حالت را از طریق یک آمیزهٔ ناهمدوس آماری (incoherent statistical mixture) توصیف نمود، همانگونه که از فیزیک کلاسیک با آن آشنایی داریم.

این به معنی آن است که به هر زیر حالت $\varphi_{\alpha i}$ یک وزن مثبت نیم معین w_i نسبت داده می‌شود طوری که

$$0 \leq w_i \leq 1, \qquad \sum_{i=1}^{K_i} w_i = 1$$

عدد w_i است احتمال آن است که یک ذرهٔ معین در حالت $\varphi_{\alpha i}$ دقیقاً در $\mathbf{P}_{\alpha i} = |\varphi_{\alpha i}\rangle\langle\varphi_{\alpha i}|$ یافت شود. این احتمال کلاسیک تداخل نمی کنند. مقدارمنتظرهٔ یک مشاهده‌پذیر $\mathcal{O}$ در چنین حالت آماده شده‌ای عبارت است از

$$\langle \mathcal{O} \rangle_\psi = \sum_{i=1}^{K_\alpha} w_i(\varphi_{\alpha i}, \mathcal{O}\varphi_{\alpha i})$$

اینکه وزنهای w_i چه مقادیری می‌پذیرند، بستگی به سرگذشت حالت دارد، که ما آنرا با «فیلتر A» ساخته‌ایم. به این موضوع در بخش بعد می پردازیم.

ابتدا به مثال فوق بازمی گردیم، که فیلتر مقدار $l = 1$ را تولید کرده‌است. وقتی ما برای این فرض دلیل داریم که در حالت بوجود آمده فوق همه جهات هم ارزش اند، آنگاه بایستی ضرایب وزن w_{-1}, w_0, w_{+1} برای هر سه حالت یکسان باشند و به دلیل شرط بهنجارش $\sum_{i=1}^{K_i} w_i = 1$ مقدار

۱/۳ را دارا می باشند. مقدار منتظره عبارت است از :

$$\langle \mathcal{O} \rangle_\psi = \sum_m (Y_{1m}, \mathcal{O} Y_{1m})/3$$

با این انتخاب در واقع مقادیر منتظرهٔ همهٔ مولفه‌های $\mathbf{l}_k$ برابر با صفرند،

$$\langle \mathbf{l}_1 \rangle_\psi = \langle \mathbf{l}_2 \rangle_\psi = \langle \mathbf{l}_3 \rangle_\psi$$

نتایج فوق را یک بار دیگرخلاصه می کنیم : یک حالت اولیه کوانتوم مکانیکی که از طریق فیلتر—A ساخته می شود و با ویژه‌مقدار α مشخص می‌شود، فقط برای مؤلفه هایی با این ویژگی شفاف است.
عملگر برافکنشی را تعریف می‌کنیم

$$W := \sum_i w_i P_{\alpha i}, \qquad 0 \leq w_i \leq 1, \qquad \sum_i w_i = 1$$

هر وزن w حقیقی و مثبت نیم معین است و از اینرو یک احتمال کلاسیک غیر تداخلی را نمایش می دهد که در اندازه گیری بعدی زیر حالتی با عدد کوانتومی $|\alpha, i\rangle$ راپیدا می‌کنیم. مقادیر w_iها بستگی به نحوهٔ بوجود آمدن حالت «قبل» از اندازه‌گیری آماده‌سازی α دارد. عملگر W که «عملگرآماری» نامیده می‌شود، کلی‌ترین توصیف ممکن از یک حالت کوانتوم‌مکانیکی را بیان می‌کند. وقتی فقط یکی از وزنها با صفر مخالف و بدلیل بهنجارش، این وزن برابر با یک باشد، مثلاً $w_k = 1$ و $w_i = 0$ برای $i \neq k$ ، آنگاه با یک حالت خالص کاملاً تداخل پذیر سروکار داریم. توابع موج آشنای مکانیک کوانتومی که پاسخ‌های معادله شرودینگر هستند، چنین حالتهای خالصی می‌باشند. اما اگر حداقل دو وزن مثلاً w_k و w_i مخالف صفر باشند، آنگاه این حالت فقط به‌طور جزیی، یعنی فقط در مؤفه‌های (α, k) و (α, j) قابلیت تداخل دارند و نه بین آنها. لذا از هنگرد آمیخته سخن گفته می شود. در هر دو مورد مقدار منتظرهٔ یک عملگر دلخواه $\mathcal{O}$ در حالتی که از طریق عملگر آماری توصیف شده عبارت است از

$$\langle \mathcal{O} \rangle = Tr(\mathcal{O}W), \qquad \langle \mathbb{I} \rangle = Tr(\mathbb{I}W) = TrW = 1$$

رابطهٔ دوم شرط بهنجارش را بیان می‌کند.
فرض می‌کنیم B یک عملگر خودالحاق باشد، که روی فضای هیلبرت معین تعریف شده‌است و طیف ویژه‌مقداری آن کاملاً گسسته باشد. ویژه‌توابع ψ_m به خنوان پایه‌ای از فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ هستند، به‌طوریکه بدون مشکل می‌توان «نمایش—B»ی عملگر آماری W را مورد استفاده قرار داد:

$$\rho_{mn} = (\psi_m, W\psi_n)$$

ماتریس ρ ماتریس چگالی نامیده می‌شود. ویژگی‌های آن در تعریف زیر خلاصه می‌شود:

ماتریس چگالی یک نمایش ماتریسی از عملگر آماری است. ماتریس چگالی دارای ویژگیهای زیر است:

۱) ρ هرمیتی است یعنی $\rho_\dagger = \rho$، ویژه مقادیر آن حقیقی، مثبت نیم معین می باشندو بین صفر و یک می‌باشند: $0 \leq w_i \leq 1$، یعنی ρ یک ماتریس مثبت است.

۲) ρ نامساوی ناوردای زیر را برآورده می‌کند

$$0 \leq Tr\rho^2 \leq Tr\rho = 1$$

۳) ρ حالت کوانتوم‌مکانیکی را به صورت زیر مشخص می‌کند

(a) وقتی $Tr\rho^2 = Tr\rho = 1$ یک حالت خالص داریم.

(b) وقتی $Tr\rho^2 < Tr\rho = 1$ یک همگرد آمیخته داریم.

۴) مقادیر منتظرهٔ یک مشاهده‌پذیر $\mathcal{O}$ در نمایش $B-$ از طریق رد حالصلضرب ρ و نمایش ماتریسی $\mathcal{O}_{pq}$ داده می‌شود

$$\langle \mathcal{O} \rangle = Tr(\rho\mathcal{O}) = \sum_{m,n} \mathcal{O}_{mn}\rho_{nm}$$

از اینرو $\langle \mathbf{P}_\chi \rangle = Tr(\rho\mathbf{P}_\chi)$، مقدار جشم داشتی عملگر برافکنشی $\mathbf{P}_\chi$، احتمال آن است که سیستم در حالت خالص χ قرار گیرد.

۳ وابستگی یک حالت به گذشتهٔ آن

در بخش قبل این سؤال بدون پاسخ ماند که از چه طریق وزنهای w_i که با آنها ویژه‌حالتهای متعلق به ویژه‌مقدار αی فیلتر $A-$ به طور ناهمدوس آمیخته می‌شوند. در این بخش به پاسخ‌های این پرسش می‌پردازیم که به جنبه‌های دیگری که واقعاً غیر منتظره است برمی خوریم که مشخصهٔ نظریهٔ کوانتومی هستند.
طبیعی است که سیستم «قبل» از آماده‌سازی توسط مشاهده پذیر A در یک حالت کوانتوم‌مکانیکی است که می‌تواند آمیخته یا خالص باشد. چون می‌خواهیم مورد کلی را در نظر بگیریم فرض می‌کنیم سیستم با عملگر آماری $W^{(i)}$ توصیف می‌شود. در این حالت فیلتر α را، که در بخش قبل

ذکر شد، قرار می‌دهیم؛ یعنی همهٔ ویژه‌مقادیر A را که با α برابر نیستند حذف می‌کنیم و حالت بدست آمده را با $W^{(f)}$ توصیف می‌کنیم. فرض می‌کنیم

$$\mathbf{P}_\alpha := \sum_{i=1}^{K_\alpha} \mathbf{P}_{\alpha i}$$

عملگر برافکنشی روی زیر فضای $\mathcal{H}_\alpha$ است که در حالت کلی با ویژه‌مقدار تبهگن α برچسب زده می‌شود. با این نمادگذاری‌ها رابطهٔ عملگرهای آماری قبل و بعد از آماده‌سازی عبارت است از

$$W^{(f)} = \frac{\mathbf{P}_\alpha W^{(i)} \mathbf{P}_\alpha}{Tr(\mathbf{P}_\alpha W^{(i)} \mathbf{P}_\alpha)} \tag{۲}$$

رابطهٔ (۲) را به صورت زیر توجیه می‌شود:

۱) حاصلضرب $\mathbf{P}_\alpha W^{(i)} \mathbf{P}_\alpha$ یک عملگر خودالحاق روی $\mathcal{H}_\alpha$ است، رد آن حقیقی و مثبت است. لذا عملگر $W^{(f)}$ نیز خودالحاق است. اثر آن فقط در زیر فضای $\mathcal{H}_\alpha$ غیر صفر است، زیرا برای همهٔ ویژه‌مقادیر βی A، که با α متفاوت اند، $W^{(f)}\mathbf{P}_\beta = 0$. از طرف دیگر برای حالتهای موجود در $\mathcal{H}_\alpha$ داریم

$$W^{(f)} \varphi_{\alpha j} = N \sum_{k=1}^{K_\alpha} \varphi_{\alpha k} (\varphi_{\alpha k}, W^{(i)} \varphi_{\alpha i}) \tag{۳}$$

که در اینجا

$$N = \frac{1}{Tr(\mathbf{P}_\alpha W^{(i)} \mathbf{P}_\alpha} = \frac{1}{\sum_{k=1}^{K_\alpha} (\varphi_{\alpha k}, W^{(i)} \varphi_{\alpha k})}$$

۲) فرض می‌کنیم $\chi_m = \sum_{i=1}^{K_\alpha} \varphi_{\alpha i} c_i^{(m)}$ عنصر دلخواهی از $\mathcal{H}_\alpha$ و $\mathbf{P}_{\chi_m}$ عملگر برافکنشی مربوطه باشد. احتمال آنکه سیستم کوانتوم مکانیکی در این حالت باشد، قبل از آماده‌سازی با $Tr(W^{(i)}\mathbf{P}_{\chi_m})$ و بعد از آماده سازی با $Tr(W^{(f)}\mathbf{P}_{\chi_m})$ داده می‌شود. چون هنگام آماده‌سازی فقط ویژه‌مقدار α مشخص می‌شود و ویژگی دیگری معین نمی‌شود، بایستی با یکدیگر متناسب باشند، که ثابت تناسب نبایستی به χ_m وابسته باشد. به بیان دیگر برای هر $\chi_m, \chi_n \in \mathcal{H}_\alpha$ داریم

$$\frac{Tr(W^{(i)}\mathbf{P}_{\chi_m})}{Tr(W^{(i)}\mathbf{P}_{\chi_n})} = \frac{Tr(W^{(f)}\mathbf{P}_{\chi_m})}{Tr(W^{(f)}\mathbf{P}_{\chi_n})} \tag{۴}$$

۳) ویژه‌مقادیر و ویژه‌بردارهای $W^{(f)}$ بنابر قسمت ۱ بدست می‌آیند، به این ترتیب که ماتریس $(\varphi_{\alpha k}, W^{(i)}\varphi_{\alpha j})$ را قطری می‌کنیم و نتیجه را در ضریب بهنجارش N ضرب می‌کنیم. برای هر عنصر $\chi \in \mathcal{H}_\alpha$ داریم

$$(\chi, W^{(f)}\chi) = N(\chi, W^{(i)}\chi) \geq ۰$$

و ازاینرو ضرورت مطرح شده در ۲ تأمین می‌شود.
معادلهٔ اخیر بیان می‌دارد که $W^{(f)}$ مثبت است یعنی ویژه مقادیر آن که وزنهای $w^{(f)}$ مباشند، مثبت نیم معین هستند. نهایتاً از $TrW^{(f)} = ۱$ نتیجه می‌شود

$$\sum_{i=۱}^{K_\alpha} w_i^{(f)} = ۱$$

رابطهٔ (۲) همهٔ روشهای آماده سازی را شامل می‌شود

۱) یک حالت خالص قبل از آماده‌سازی، می‌تواند بعد از آماده‌سازی خالص بماند. مثلاً وقتی حالت اولیه یک ویژه‌بردار A با ویژه‌مقدار β باشد، فیلتر «α» یا همین حالت را تأیید می‌کند و یا نتیجهٔ صفر می‌دهد

$$W^{(f)} = \delta_{\alpha\beta} W^{(i)}$$

۲) از یک هنگرد آمیخته می‌توان یک حالت خالص را فیلتر نمود. مثلاً فیلتر می‌تواند از $W^{(i)} = \sum_\mu w_\mu \mathbf{P}_\mu$ حالت خالص با عدد کوانتومی (μ_k) که متعلق به $\mathcal{H}_\mu$ انتخاب نمود.

۳) از یک حالت خالص می‌توان یک هنگرد آماری ساخت. بطور کیفی می‌توان گفت که این حالت وقتی اتفاق می‌افتد که برای هر تک رویداد ممکن ویژه‌مقدار را مشخص کنیم و فقط قسمتی از طیف (یا تمام طیف) را اجازه عبور دهیم. برای اینکار دو مشاهده‌پذیر E و F را در نظر می‌گیریم که برای سادگی فرض می‌کنیم طیف گسسته‌دارند وبا هم جابجا نمی‌شوند. ویژه‌توابع E را با $\varphi_\mu \equiv |\mu\rangle$ و ویژه‌توابع F را با $\psi_a \equiv |a\rangle$ نشان می‌دهیم و فرض می‌کنیم مشاهده‌پذیر F فیلتری باشد که حالت خالص $W^{(i)} = \mathbf{P}_\mu$ با آن برخورد می‌کند. چون $[E, F] \neq ۰$ است، F, E هیچ ویژه‌تابع مشترکی ندارند. لذا

$$\mathbf{P}_\mu \equiv |\mu\rangle\langle\mu| = \sum_{a,a'} c_a^{(\mu)} c_{a'}^{(\mu)*} |a\rangle\langle a'| \qquad (۵)$$

از طریق فیلتر آماده‌سازی F فقط یک زیر مجموعهٔ Δ از ویژه‌مقادیر F عبور داده‌می‌شوند، بدون آنکه ویژه‌مقدار F برای هر تک رویداد حقیقتاً اندازه‌گیری شود. این به‌معنی آن

است که در طرف راست (۲) بایستی عملگر برافکنشی $\mathbf{P}_\Delta = \sum_{a\in\Delta} \mathbf{P}_a$ قرار داده‌شود. آنگاه بدست می‌آوریم

$$\begin{aligned} W^{(f)} &= \frac{\mathbf{P}_\Delta W^{(i)} \mathbf{P}_\Delta}{Tr(\mathbf{P}_\Delta W^{(i)} \mathbf{P}_\Delta)} = \frac{۱}{Tr(\mathbf{P}_\Delta W^{(i)} \mathbf{P}_\Delta)} \sum_{a\in\Delta} \sum_{a'\in\Delta} |a\rangle \sum_{b,b'} c_b^{(\mu)} c_{b'}^{(\mu)*} \langle a|b\rangle\langle b'|a'\rangle\langle a| \\ &= \frac{۱}{\sum_{a\in\Delta} |c_a^{(\mu)}|^۲} \sum_{b,b'\in\Delta} |b\rangle c_b^{(\mu)} c_{b'}^{(\mu)*} \langle b'| \end{aligned} \tag{٦}$$

چنین حالت آماده‌شده‌ای دارای رابطهٔ فازی ثابتی است و از اینرو مانند حالت اولیه یک حالت خالص است زیرا بسادگی می‌توان دید $Tr[W^{(f)}]^۲ = ۱$.
اگر آماده‌سازی را طوری اجرا کنیم که همهٔ ویژه‌مقادیر F اندازه‌گیری شوند و همهٔ آنهایی که در بازهٔ Δ نیستند حذف گردند، آنگاه رابطهٔ (٦) با رابطهٔ زیر جایگزین میشود

$$W^{(f)} = \frac{۱}{\sum_{a\in\Delta} |c_a^{(\mu)}|^۲} \sum_{b\in\Delta} |b\rangle |c_b^{(\mu)}|^۲ \langle b| \tag{۷}$$

این یک هنگرد آماری است زیرا

$$\sum_{b\in\Delta} |c_b^{(\mu)}|^< (\sum_{a\in\Delta} |c_a^{(\mu)}|^۲)^۲$$

و لذا $Tr[W^{(f)}]^۲ < ۱$. از طریق اندازه‌گیری مشاهده‌پذیر F رابطهٔ فازی تخریب می‌شود و حالتهای $b \in \Delta$ با وزنهای حقیقی ظاهر می‌شوند

$$w_b = \frac{|c_b^{(\mu)}|^۲}{\sum_{a\in\Delta} |c_a^{(\mu)}|^۲}, \qquad b \in \Delta$$

در اینجا با یک ویژگی منحصر بفرد مکانیک کوانتومی مواجه‌می‌شویم:

> وقتی در آماده‌سازی همهٔ مقادیر واقعاً پذیرفته شدهٔ فیلتر F معین می‌شوند، همهٔ روابط فازی از دست می‌روند؛ حالت بوجود آمدهٔ جدید یک هنگرد آمیخته است. در هر دو مورد (٦) و (۷) اطلاعات مربوطه به حالت قبل از آماده‌سازی، در اولین مورد به صورت ضرایب بسط $c_b^{(\mu)}$، $b \in \Delta$ و در مورد دوم از طریق وزنهای نسبی w_b حفظ می‌شود. حال فرض می‌کنیم فقط یک تک ویژه‌حالت F عبور داده می‌شود. بنابراین $W^{(f)} = \mathbf{P}_a$ و همهٔ اطلاعات در مورد حالت سیستم قبل از آماده‌سازی از بین می‌رود. اینکه در طبیعت واقعاً چنین است، از طریق آزمایش و تجربه تأیید می‌شود.

۴ شار طیفی عملگرهای برافکنشی

یک قضیهٔ بسیارمهم در نظریهٔ عملگرهای خطی روی فضای هیلبرت بیان می‌کند که هر عملگر خودالحاقی یا یکانی را می‌توان از طریق ویژه‌مقادیر و عملگرهای برافکنشی نمایش داد که روی زیر فضاهای مربوطه تصویر می‌کند. این نمایش را **نمایش طیفی** می‌گویند که یکتاست و اجازه می‌دهد تا عملگرهای مرزدار و بدون مرز یا عملگرهایی با طیف کاملاً گسسته یا طیف مخلوط و یا پیوسته را به‌طور یکسان نمایش داد. بحث کامل ریاضی از حوصله این مباحث خارج است و فقط آن‌را به صورت کیفی و با مثال مورد بحث قرارمی‌دهیم.

فرض می‌کنیم A یک عملگر با طیف کاملاً گسستهٔ $\{\lambda_i\}$ باشد. هر ویژه مقدار λ_i یگک زیر فضای $\mathcal{H}_i$ از $\mathcal{H}$ را معین می‌کند که بهد آن برابر با درجهٔ تبهگنی آن است. ویژه توابع متعلق به λ_i را با $\varphi_{i,k}$ نشان می‌دهیم که $k = ۱, \cdots, K_i$ می‌باشد، آنگاه عملگر برافکنشی روی $\mathcal{H}_i$ به صورت زیر داده می‌شود

$$\mathrm{P}_i = \sum_{k=۱}^{K_i} \varphi_{i,k}(\varphi_{i,k}, \cdot) \equiv \sum_{k=۱}^{K_i} |i,k\rangle\langle i,k| \qquad (۸)$$

زیر فضاهای $\mathcal{H}_i$ دوبدو متعامدند، لذا جمع دو عملگر برافکنشی $P_i + P_j$، وقتی $i \neq j$ دوباره یک عملگر برافکنشی است. چون ویژه توابع A کاملند، جمع همهٔ زیر فضاها برابر با کل فضای $\mathcal{H}$ است؛ از اینرو جمع همهٔ عملگرهای برافکنشی عنصر همانی روی $\mathcal{H}$ است

$$\sum_{i=۱}^{\infty} \mathrm{P}_i = \mathbb{I}$$

بنابراین یک تجزیهٔ واحد (Identity resolution) روی $\mathcal{H}$ بدست می‌آید. برای یک حالت $f \in \mathcal{H}$ داریم

$$f = \sum_i \mathrm{P}_i f, \qquad Af = \sum_i \lambda_i \mathrm{P}_i f$$

و به این ترتیب مقدار چشم داشتی عملگر A در حالت f با کمک طیف ویژه‌مقدار A و عملگر برافکنشی قابل بیان است

$$\langle A\rangle_f \equiv (f, Af) = \sum_i \lambda_i \|\mathrm{P}_i f\|^۲.$$

به‌ویژه مقدار چشم داشتی عملگر واحد در حالت f عبارت است از

$$(f, \mathbb{I} f) = \|f\|^۲ = \sum_i (f, \mathrm{P}_i f) = \sum_i \|\mathrm{P}_i f\|^۲$$

این رابطه شبیه به مورد فضای برداری متناهی است: مربع طول یک بردار برابر با جمع مربعات مؤلفه‌های آن روی پایهٔ آن فضا است.

ویژه مقادیر یک عملگر A با طیف کاملاً گسسته را می‌توان به‌ترتیب بزرگی مرتب نمود: $\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots$. در موارد مهم فیزیکی این ویژه مقادیر از پایین مرزدارند. همهٔ عملگرهای هامیلتونی، که در مکانیک موانتومی با آنها آشنا شده‌ایم دارای این ویژگی هستند. از اینرو یک شار طیفی از عملگرهای برافکنشی به‌این صورت تعریف می‌شود که عملگرهای برافکنشی مربوطه نیز مرتب می‌شوند و جمع‌بندی روی همهٔ برافکنش‌هایی که ویژه مقدار مربوط به آنها کمتر از یک عدد حقیقی معین است انجام می‌گیرد

$$E(\mu) := \sum_{i,(\lambda_i \leq \mu)} \mathrm{P}_i, \qquad \mu \in \mathbb{R} \tag{۹}$$

چون P_i روی زیر فضاهای دوبدو متعامد تصویر می‌کند، $E(\mu)$ که به‌صورت بالا تعریف شده‌است، دوباره یک عملگر خودالحاق است و ویژه‌مقدار آن در یک حالت $f \in \mathcal{H}$ برابر است با

$$(f, E(\mu)f) = \sum_{i,(\lambda_i \leq \mu)} (f, \mathrm{P}_i f) \tag{۱۰}$$

که یک تابع حقیقی غیر کاهنده از متغیر حقیقی μ است. در مثال بالا که طیف کاملاً گسسته است این تابع پله‌ای است، زیرا هر بار که μ از ویژه‌مقدار بعدی λ_j می گذرد، یک مقدار محدود افزایش می یابد (البته ممکن است f هیچ مؤلفه ای در $\mathcal{H}_j$ نداشته باشد).
برای عملگرهای برافکنشی یک رابطه طبیعی ترتیب وجود دارد

$$\mathrm{P}_j < \mathrm{P}_i \qquad : \mathcal{H}_j \subset \mathcal{H}_i$$

که بیان می‌کند P_i بزرگتر از P_j است به شرط آنکه زیر فضای $\mathcal{H}_j$ یک زیر فضای واقعی $\mathcal{H}_i$ باشد. برای هر $f \in \mathcal{H}$ داریم

$$(f, \mathrm{P}_i f) \geq (f, \mathrm{P}_j f)$$

شار طیفی تعریف شده برای A در رابطه با (۹) دارای ویژگی ترتیب زیر است

$$\mu' \geq \mu : \qquad E(\mu') \geq E(\mu), \qquad \lim_{\epsilon \to 0} E(\mu + \epsilon) = E(\mu).$$

به زبان کلمات وقتی به‌عدد حقیقی μ از بالا نزدیک می‌شوی $E(\mu+\epsilon)$ به $E(\mu$ می‌رسد. هنگامی که $\mu = -\infty$ آنگاه $E(-\infty) = 0$ زیرا در اینجا طیف هنوز شروع نشده است. در $\mu = \infty$ طیف کامل را داریم و بنابراین $E(+\infty) = 1$.با اینکه مثال ما در مورد طیف گسسته بود اما می‌توان تعریف را به‌طیف پیوسته یا مخلوط تعمیم داد. ازاینرو تعریف کلی زیر را داریم
تعریف شار طیفی. یک شار طیفی شاری از عملگرهای برافکنشی $E(\mu)$ است که به یک عدد

حقیقی μ وابسته است و دارای ویژگی‌های زیر است

$$E(\mu') \geq E(\mu) > \quad if \quad \mu' \geq \mu$$
$$\lim_{\epsilon \to 0^+} E(\mu+\epsilon) = E(\mu), \;\; E(-\infty) = 0, \;\; E(+\infty) = 1 \qquad (11)$$

با این تعریف دو چیز بدست می‌آید: از یک طرف می‌توان تعریفی از طیف ویژه مقداری یک مشاهده‌پذیر بدست داد که هم مورد کاملاً گسسته و هم در مورد کاملاً پیوسته یا مخلوط را شامل می‌شود:

تعریف طیف ویژه مقدار. طیف ویژه مقدار مجموعهٔ همهٔ مقادیر عددی است که در آن شار طیفی ثابت نیست.

در واقع ویژه مقادیر گسسته جایی قرار دارند که شار طیفی غیر پیوسته است. یک طیف پیوسته جایی قرار دارد که $E(\mu)$ یک تابع پیوسته غیر ثابت و ناکاهنده است.

از طرف دیگر این تعریف بکار می‌رود برای آنکه انتگرال‌ها روی طیف یک مشاهده پذیر را طوری بتوان نوشت که موارد متمتیز را نخواهیم جداگانه مورد بررسی قراردهیم. مقدار چشم‌داشتی $E(\mu)$ در حالت $f \in \mathcal{H}$، $(f, E(\mu)f)$، یک تابع کراندار است که در حالت کلی پیوسته نیست. با یک μی افزایش یابنده این تابع یا به‌صورت قطعه‌ای (یعنی بین دو ویژه‌مقدار پشت سر هم) ثابت است و یا به‌طور هموردا با μ (در یک پیوستار) افزایش می‌یابد و در هیچ جا کاهنده نیست. چون این تابع بین ۰ و ۱ قرار دارد، کراندار است و دارای ویژگی‌هایی است که می توان انتگرال استیلتجس (Stieltjes) را برای آن تعریف کردبه طوریکه مثلاً

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d(f, E(\mu)f) = \|f\|^2 = 1, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \mu d(f, E(\mu)f) = (f, Af) = \langle A \rangle_f. \qquad (12)$$

در اینجا نمی توان این انتگرال را به‌تفصیل تعریف نمود، اما در اینجادو مثال رامطرح می‌کنیم که ارتباط مستقیمی با مباحث فیزیکی دارند و محاسبهٔ انتگرال‌های استیلتجس را روشن می‌کنند.

مثال ۱. فرض می‌کنیم تابع حقیقی $g(x)$ (مانند تابع $(f, E(\mu)f)$) در بازهٔ $[a, b]$ روی محور اعداد حقیقی به طور قطعه‌ای ثابت است. ناپیوستگی آن می تواند در نقاط $c_0 = a, c_1, \cdots, c_p = b$ قرار داشته‌باشد؛ مقدار آن در بازهٔ (c_{k-1}, c_k) عبارت است از $g(x) = g_k$. علاوه بر این فرض می‌کنیم $\delta_1 = g_2 - g_1, \cdots, \delta_p = g(b) - g_p$. نهایتاً فرض می‌کنیم $f(x)$ یک تابع پیوسته روی بازهٔ $[a, b]$ باشد. انتگرال استیلتجس که در جایی دارای مقدار است که $g(x)$ نا پیوسته باشد، در این مثال از طریق جمع زیر داده می‌شود

$$\int_a^b dg f(x) = \sum_{i=1}^{p} f(c_i)\delta_i$$

مثال ۲.فرض می‌کنیم $f(x)$ و $g(x)$ در $[a,b]$ پیوسته‌اند و $g(x)$ در این بازه دیفرانسیل پذیر نیز می‌باشد. برای تعریف انتگرال استیلتجس یک زیجیره از ظریف سازی بازهٔ $[a,b]$ انجام می‌شود و بایستی ثابت شود این دنباله به یک نتیجهٔ همگرا منجر می‌شود. در مثال اول ظریف سازی بازه بی‌معنی است زیرا این کار از طریق محل‌های ناپیوستگی $g(x)$ معین شده‌است و ظریف سازی منجر به تغییری در نتایج انتگرال نمی‌شود. اما اگر $g(x)$ پیوسته و دیفرانسیل پذیر باشد، می توان بازه را بی نهایت کوچک نمود و قضیهٔ مقدار میانگین برای تفاضل مقادیر تابع g را بکار برد

$$g(x_{k+۱}) - g_(x_k) = g'(\xi_k)(x_{k+۱} - x_k)$$

که در اینجا ξ_k یک مقدار میانگین بین x_k و $x_{k+۱}$ است. می‌بینیم که به همان انتگرال معمولی ریمانی می‌رسیم

$$\int_a^b dg(x)f(x) = \int_a^b g'(x)f(x)dx$$

نتیجه ای که در بالا به شکل مقادیرچشم داشتی و انتگرال‌هایی روی آنها بدست آوریم، را می توان به شکل زیر نوشت

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dE(\mu)f = f, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \mu dE(\mu)f = Af \tag{۱۳}$$

این نحوه نوشتن با توجه به یک قضیهٔ مهم در نظریهٔ عملگرهای خطی در فضای هیلبرت، اهمیت زیادتری می یابد:

قضیه طیفی. هر عملگر خودالحاق A با حوزهٔتعریف $\mathcal{D} \subset \mathcal{H}$ دارای یک شارطیفی معین است که در اینجا

$$\mathcal{D} = \{f \in \mathcal{H} | \int_{-\infty}^{+\infty} \mu^۲ d(f, E(\mu)f) < \infty\}$$

و کنش آن روی بردارهایی از حوزهٔ تعریف آن از طریق

$$Af = \int_{-\infty}^{+\infty} \mu dE(\mu), \qquad f \in \mathcal{D}$$

داده می شود. بر عکس اگر هر عملگر را بتوان از طریق چنین انتگرالی روی شار طیفی تعریف نمود، آن عملگر خودالحاق است.

۵۵

۵ قضیهٔ گلیسون (Gleason)

اگر P_a یک عملگر برافکنشی باشد، آنگاه

$$Prob(P_a;\rho) = Tr(\rho P_a), \qquad P_a \in \mathbb{P}(\mathcal{H}) \tag{۱۴}$$

این احتمال آن است که اندازه‌گیری عملگر A در حالت ρ به ویژه‌مقدار a منجر می‌شود.
در اینجا سؤال مهمی مطرح است: آیا راه دیگری برای انتساب احتمال به عناصر $\mathbb{P}(\mathcal{H})$ وجود دارد، یا صورتبندی استاندارد مکانیک کوانتومی یکتاست؟ به‌طور دقیقتر آیا می‌توان یک نظریهٔ احتمالاتی جدید یافت که از فضای هیلبرت شروع کنیم و یک نگاشت احتمالاتی $\mathrm{Prob} : \mathbb{P}(\mathcal{H}) \to \mathbb{R}$ را بسازیم که از نوع (۱۴) نباشد. در این نظریه فضای حالت‌ها چیست؟

ابتدا شرایطی که یک نظریهٔ احتمالاتی در مکانیک کوانتومی باید برآورده کند را در نظر می‌گیریم . با توجه به اینکه P_i ها روی زیرفضاهای مجزا تصویر می‌کنند یعنی برای $i \neq j$، $P_iP_j = ۰$، از اینرو

$$Prob(P_۱ \vee P_۲ \vee \cdots \vee P_M) = \sum_{i=۱}^{M} Prob(P_i) \tag{۱۵}$$

همچنین با توجه به شرایط دیگر روی احتمال می‌توان حداقل استلزامات روی هر تابع احتمال کوانتومی $Prob : \mathbb{P}(\mathcal{H}) \to \mathbb{R}$ را به‌صورت زیر بیان نمود:

$$۰ \leq Prob(P) \leq ۱, \qquad P \in \mathbb{P}(\mathcal{H}) \tag{۱۶}$$

$$Prob(۰) = ۰, \qquad Prob(\mathbb{I}) = ۱ \tag{۱۷}$$

$$Prob(\sum_{i=۱}^{\infty} P_i) = \sum_{i=۱}^{\infty} Prob(P_i) \tag{۱۸}$$

که این روابط برای هر مجموعهٔ متناهی یا به‌طور شمارش پذیری نامتناهی از عملگرهای برافکنشی $\{P_۱, P_۲, \cdots\}$ که دوبدو متعامدند، برقرار است.
پیداست شرایط سه‌گانهٔ‌بالا را تعریف

$$Prob(P) := Tr(\rho P) \tag{۱۹}$$

برآورده می‌کند، که ρ ماتریس چگالی است. قضیهٔ گلیسون نشان می‌دهد که عکس این مطلب نیز برقرار است:
قضیهٔ‌گلیسون. فرض کنید $\mathcal{H}$ یک فضای هیلبرت با بعد N (محدود یا بطور شمارش پذیری نامحدود) باشد که $N > ۲$. فرض می‌کنیم μ یا $(Prob)$ یک سنجهٔ احتمالاتی روی

زیرفضاهای بستهٔ $\mathcal{H}$ باشد یعنی برای تعداد محدود یا شمارش پذیری نامحدود از زیر فضاهای دوبدو متعامد جمع‌پذیر است. آنگاه یک عملگر مثبت ρ از کلاس رد (trace class) وجود دارد که رد آن یک است و $\mu(P) = Tr(\rho P)$، در اینجا P برافکنش روی یک زیر فضای بسته است.

شرط $N \geq ۳$ به دلیل ویژگی های موارد $N = ۱$ و $N = ۲$ می‌باشد. اگر $N = ۱$ باشد فقط یک برافکنش غیر صفر وجود دارد و قضیه چیزی برای گفتن ندارد. اگر $N = ۲$، هر برافکنش غیر صفر را می‌توان بصورت $P = \frac{۱}{۲}(\mathbb{I} + \sigma \cdot \mathbf{n})$ نوشت، که $\mathbf{n}$ یک بردار یکهٔ سه بعدی است. تنها عملگر مجزا از P مربوط به $-\mathbf{n}$ است. همواره می‌توان $\mu(P)$ را به صورت تابع $\mu(\mathbf{n})$ در نظر گرفت بطوریکه $\mu(\mathbf{n}) + \mu(-\mathbf{n}) = ۱$. با اینوجود می‌توان بسادگی شرط $N > ۲$ را به دلایل فیزیکی کنار گذاشت، به این ترتیب که یک سیستم S دارای یک فضای هیلبرت یک یا دو بعدی را همراه با سیستم دیگری که با آن برهم کنش ندارد، در نظر می‌گیریم.

٦ اندازه‌گیری تعمیم یافته

آنچه در مبحث آماده‌سازی حالت سیستم از طریق عملگر آماری گفته شد منطبق بر تعبیر فون‌نویمن از اندازه‌گیری است که به‌آن **اندازه‌گیری متعامد** نیز می‌گویند. بنا بر این تعبیر، اندازه‌گیری مشاهده‌پذیر M روی فضای هیلبرت $\mathcal{H}_\alpha$ موجب می‌شود که هر حالت به یکی از زیرفضاهای فضای هیلبرت برود که با ویژه مقدار معینی برچسب می‌خورد. چون برای مشاهده‌پذیرها زیرفضاهای متعلق به ویژه مقادیر متفاوت متعامدند، بنابراین اندازه‌گیری به تعبیر فون‌نویمن یعنی کاهش (تحویل) فضای هیلبرت به زیر فضاهای متعامد آن. به این‌ترتیب می توان مشاهده‌پذیر M را بر حسب عملگرهای برافکنشی و طیف آن روی زیر فضاهای متعامد نمایش داد:

$$M = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda P_i \qquad (20)$$

که در اینجا λ_i ویژه‌مقادیر M و $\mathbf{P}_i$ عملگرهای برافکنشی روی زیر فضای هیلبرت iام است که با λ_i بر چسب می‌خورد. به همین ترتیب می‌توان نشان داد

$$\langle M \rangle_\psi = \sum_i \lambda_i \|P_i \psi\|^2, \qquad \psi \in \mathcal{H}_\alpha \qquad (21)$$

یعنی مقدار منتظرهٔ M را می‌توان از طریق طیف ویژه‌مقادیر M و عملگرهای برافکنشی بیان نمود.

دراینجا می‌خواهیم مفهموم اندازه‌گیری را فراتر از اندازه‌گیری‌های متعامد به تعبیر فون‌نویمن مورد توجه قرار دهیم. فرض می‌کنیم $|\alpha\rangle \in \mathcal{H}_\alpha$ عنصری از فضای هیلبرت $\mathcal{H}_\alpha$ که حالت سیستم α را بیان می‌کند. اگر سیستم را به‌حاصلضرب تانسوری $\mathcal{H}_\alpha \otimes \mathcal{H}_\beta$ گسترش دهیم و فرض کنیم اندازه گیری های متعامدی روی حاصلضرب تانسوری انجام شود، لزوماً این اندازه‌گیری‌هادر سیستم α متعامد نیست. ابتدا مسئله را از نظر ریاضی مورد توجه قرارمیدهیم.

یک اندازه گیری تعمیم یافته GM مجموعه‌ای از عملگرهای یکانی $\{M_a\}$ است که رابطهٔ زیر را برآورده می‌کند

$$\sum_a M_a^\dagger M_a = \mathbb{I} \qquad (22)$$

حالتی که تحت تأثیر یک GM قرار می‌گیرد به حالت

$$\frac{M_a|\psi\rangle}{\sqrt{\langle\psi|M_a^\dagger M_a|\psi\rangle}} \qquad (23)$$

با احتمال

$$p(a) = \langle\psi|M_a^\dagger M_a|\psi\rangle \tag{۲۴}$$

می‌رود؛ در اینجا

$$\sum_a p(a) = ۱$$

در GMها یک خروجی اندازه‌گیری شده وجود دارد اما مفهوم یک مقدار اندازه‌گیری شده (یعنی ویژه مقدار یک مشاهده‌پذیر) وجود ندارد. زیرا M_a ها خودالحاق نیستند، لذا

مثال. فرض می کنیم آلیس یکی از n حالت $|\psi_i\rangle$، $۱ \leq i \leq n$، و آنرا به باب می‌دهد. اگر $\{|\psi_i\rangle\}$ متعامد باشند، باب می‌تواند با انجام یک GM حالتی که به او داده شده است را مشخص کند

$$M_j = |\psi_j\rangle\langle\psi_j|$$

زیرا

$$p(j) = \langle\psi_i|M_j^\dagger M_j|\psi_i\rangle = \delta_{ij}.$$

اگر حالتهای $\{|\psi_i\rangle\}$ نامتعامد باشند، هیچ GM وجود ندارد که این حالتهارا از هم متمایز کند.

۷ اندازه‌گیری های POVM

یک POVM روی یک سیستم کوانتومی یک مجموعهٔ $\{E_m\}$ از عملگرهای مثبت است که در رابطهٔ

$$\sum_m E_m = \mathbb{I}. \tag{۲۵}$$

وقتی روی یک حالت $|\psi\rangle$ یک اندازه گیری POVM انجام می‌شود، با احتمال

$$p(m) = \langle\psi|E_m|\psi\rangle. \tag{۲۶}$$

خروجی m رخ میدهد. بعد از اندازه‌گیری حالت معین نیست.
مثال. آلیس یک کیوبیت را که‌در یکی از دو حالت زیر آماده شده است را به باب میدهد:

$$|\psi_۱\rangle = |۰\rangle, \quad |\psi_۲\rangle = \frac{۱}{\sqrt{۲}}(|۰\rangle + |۱\rangle)$$

چون حالتها متعامد نیستند هیچ اندازه‌گیری برای تمیز این دو حالت وجود ندارد. حال POVM زیر را تعریف می‌کنیم:

$$\begin{aligned} E_1 &:= \frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}|1\rangle\langle 1| \\ E_2 &:= \frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}\frac{(|0\rangle - |1\rangle)(\langle 0| - \langle 1|)}{2} \\ E_3 &:= \mathbb{I} - E_1 - E_2 \end{aligned}$$

اگر حالت $|\psi_1\rangle$ باشد خروجی E_1 نمی تواند رخ دهد. لذا اگر E_1 اندازه‌گیری شود، حالت باید $|\psi_2\rangle$ باشد. به همین ترتیب اگر E_2 اندازه‌گیری شود حالت باید $|\psi_1\rangle$ باشد. اگر E_3 اندازه گیری شود نتیجهٔ معینی بدست نمی آید.

۸ هم ارزی POVM و GM

یک POVM بصورت $\{E_m\}$ در نظر می‌گیریم و تعریف می کنیم

$$M_m = \sqrt{E_m}.$$

آنگاه

$$\sum_m M_m^\dagger M_m = \sum_m E_m = \mathbb{I},$$

ازاینرو $\{M_m\}$ یک GM هم‌ارز با $\{E_m\}$ است.

برعکس برای یک GM بصورت $\{M_m\}$ تعریف می‌کنیم

$$E_m = M_m^\dagger M_m$$

۹ GM ها به‌عنوان PM

فرض می‌کنیم $\{M_m; 1 \leq m \leq n\}$ یک GM روی یک سیستم α باشد. فرض می‌کنیم β یک سیستم کمکی (ancilla) با بعد n و پایهٔ $\{|m\rangle : 1 \leq m \leq n\}$ باشد. روی فضای هیلبرت

$\mathcal{H}_\alpha \otimes \mathcal{H}_\beta$ یک عملگر یکانی تعریف می‌شود که کنش آن روی حالتهای حاصلضربی به شکل $|\psi\rangle|۱\rangle$ عبارت است از

$$U|\psi\rangle|۱\rangle \to \sum_m M_m|\psi\rangle|m\rangle$$

همچنین روی $\mathcal{H}_\alpha \otimes \mathcal{H}_\beta$ یک PM بصورت

$$\{P_m := I_\alpha \otimes |m\rangle\langle m|;\ ۱ \leq m \leq M\}.$$

به این ترتیب اندازه‌گیری تعمیم یافتهٔ $\{M_m\}$ روی حالت $|\psi\rangle \in \mathcal{H}_\alpha$ هم‌ارز است با PM

$$\sum_m mP_m = \sum_m mI_\alpha \otimes |m\rangle\langle m|$$

روی حالت $U|\psi\rangle|۱\rangle \in (\mathcal{H}_\alpha \otimes \mathcal{H}_\beta)$ به این معنی که نتایج یکسان دارای احتمال یکسان است. بویژه روی سیستم حاصلضرب، احتمال خروجی اندازه‌گیری

$$\frac{P_m U|\psi\rangle|۱\rangle}{\sqrt{\langle\psi|U^\dagger P_m U|\psi\rangle}} = \frac{M_m|\psi\rangle|m\rangle}{\sqrt{\langle\psi|M_m^\dagger M_m|\psi\rangle}} \tag{۲۷}$$

برابر است با

$$p(m) = \langle\psi|M_m^\dagger M_m|\psi\rangle$$

محصول این اندازه‌گیری یک حالت نابهم‌تافته (unentangled)است و زیر سیستم α در حالت زیر قرار می‌گیرد

$$\frac{M_m|\psi\rangle}{\sqrt{\langle\psi|M_m^\dagger M_m|\psi\rangle}}$$

۱۰ ضرب تانسوری دو فضای هیلبرت

ضرب تانسوری توصیفی ریاضی از ویژگی‌های مستقل از هم یک سیستم کوانتومی بطور همزمان یا توصیف سیستم‌های مرکب از چندین سیستم می باشد.

دو فضای هیلبرت $\mathcal{H}_۱$ و $\mathcal{H}_۲$ را در نظر می‌گیریم. بردارهای $\psi_۱$ و $\psi_۲$ به ترتیب به $\mathcal{H}_۱$ و $\mathcal{H}_۲$ متعلق‌اند. بردار جدید $\psi_۱ \otimes \psi_۲$ متعلق به فضای هیلبرت $\mathcal{H}_۱ \otimes \mathcal{H}_۲$ است که آنرا حاصلضرب تانسوری دو فضا می‌نامیم. به این ترتیب فضای حالت سیستم کوانتومی مرکب برابر با حاصلضرب تانسوری فضاهای حالت کوانتومی زیر سیستم‌های آن است. تعریف کامل عملیات حاصلضرب تانسوری بسسیار پیچیده است اما برای مقصد ما نکات زیر کافی خواهد بود:

۱) عمل ضرب تانسوری در هر مؤلفه خطی است یعنی برای $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ و $\psi_1, \psi_2 \in \mathcal{H}_1, \varphi \in \mathcal{H}_2$ داریم

$$\begin{aligned}(\alpha\psi_1 + \beta\psi_2) \otimes \varphi &= (\alpha\psi_1 \otimes \varphi) + (\beta\psi_2 \otimes \varphi) \\ \varphi \otimes (\alpha\psi_1 + \beta\psi_2) &= \varphi \otimes \alpha\psi_1 + \varphi \otimes \beta\psi_2)\end{aligned}$$

ضرب در یک مختلط به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$\alpha(\psi \otimes \varphi) = (\alpha\psi) \otimes \varphi = \psi \otimes \alpha\varphi, \qquad \alpha \in \mathbb{C}, \psi \in \mathcal{H}_1, \varphi \in \mathcal{H}_2$$

۲) بردارهایی در $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ وجود دارد که نمی‌توانند به‌صورت یک حاصلضرب یگانه $\psi \otimes \varphi$ نمایش داده شوند، اما با انتخاب یک پایه هر بردار را می‌توان به‌صورت جمع بردارهای حاصلضربی بیان نمود. مثلاً اگر $\{e_1, \cdots, e_{N_1}\}$ یک پایه برای $\mathcal{H}_1$ و $\{f_1, \cdots, f_{N_2}\}$ پایه‌ای برای $\mathcal{H}_2$ باشد، آنگاه پایه برای $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ مجموعهٔ بردارهایی به‌شکل $e_i \otimes f_j$ است. بنابراین یک بردار اختیاری در فضای $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ به‌صورت زیر نوشته می‌شود

$$\psi = \sum_{i=1}^{N_1} \sum_{j=1}^{N_2} \psi_{ij} e_i \otimes f_j \tag{۲۸}$$

به‌ویژه پیداست بعد فضای $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ حاصلضرب ابعاد $\mathcal{H}_1$ و $\mathcal{H}_2$ است.

۳) حاصلضرب اسکالر روی بردارهای حاصلضربی به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$(\psi_1 \otimes \psi_2, \varphi_1 \otimes \varphi_2) := (\psi_1, \varphi_1)_{\mathcal{H}_1} (\psi_2, \varphi_2)_{\mathcal{H}_2} \tag{۲۹}$$

۴) حاصلضرب تانسوری عملگرها نیز قابل تعریف است. اگر A_1 عملگری روی $\mathcal{H}_1$ و A_2 یک عملگر روی $\mathcal{H}_2$ باشد، حاصلضرب تانسوری $A_1 \otimes A_2$ عبارت است از

$$(A_1 \otimes A_2)\psi_1 \otimes \psi_2 = (A_1\psi_1) \otimes (A_2\psi_2) \tag{۳۰}$$

بنابراین برای $\psi \in \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$

$$(A_1 \otimes \mathcal{A}_2)\psi := \sum_{i=1}^{N_1} \sum_{j=1}^{N_2} \psi_{ij} (A_1 e_i \otimes A_2 f_j) \tag{۳۱}$$

همانند بردارها عملگرهایی روی $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ تعریف می‌شود که نمی توان آنها را به‌صورت حاصلضرب $A_1 \otimes A_2$ نوشت. اما همهٔ عملگرها را می‌توان به‌صورت جمع چنین عملگرهای حاصلضربی بیان نمود.

نکته‌ها

۱) در نمادگذاری دیراک ضرب تانسوری دو حالت $|\alpha\rangle$ و $|\beta\rangle$ به‌صورت $|\alpha\rangle|\beta\rangle$ نوشته می‌شود.

۲) یک عملگر A_1 که روی $\mathcal{H}_1$ اثر می‌کند، در سیستم مرکب به‌صورت $A_1 \otimes \mathbb{I}$ نمایش داده می‌شود. توجه داریم حتی اگر A_1 روی هیچ تبهگنی نداشته باشد، عملگر $A_1 \otimes \mathbb{I}$ که روی $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ عمل می‌کند بسیار تبهگن است زیرا $(A_1 \otimes \mathbb{I})|a\rangle|\varphi\rangle = a|a\rangle|\varphi\rangle$، که این برای هر $\varphi \in \mathcal{H}_2$ برقرار است. لذا همهٔ حالتهای $|a\rangle|\varphi\rangle$ دارای ویژه‌مقدار a هستند.

۳) اگر A_1 و A_2 یک جفت مشاهده‌پذیر برای سیستم‌های ۱ و ۲ باشند، آنگاه

$$[A_1 \otimes \mathbb{I}, \mathbb{I} \otimes A_2] = 0 \qquad (۳۲)$$

یعنی دو عملگر A_1 و A_2 روی سیستم کل با هم جابجا می‌شوند. یعنی می‌توان آنها را همزمان اندازه‌گیری نمود.
از اینجا می‌توان انتظار داشت که توزیع احتمال یافتن سیستم مرکب در یک حالت خاص به‌صورت زیر تعریف شود. $A_1 \otimes \mathbb{I}$ و $\mathbb{I} \otimes A_2$ دارای یک مجموعهٔ کامل از ویژه‌بردارهای همزمان می‌باشند که عبارتند از حالتهای $|a_1\rangle|a_2\rangle$ که a_1 و a_2 روی گسترهٔ ویژه‌مقادیر A_1 و A_2 قرار دارند. بنابراین در یک حالت حاصلضربی داریم

$$\begin{aligned} Prob(A_1 = a_1, A_2 = a_2; |\psi_1\rangle|\psi_2\rangle) &= |(\langle a_1|\langle a_2|)(|\psi_1\rangle|\psi_2\rangle)|^2 \\ &= |\langle a_1|\psi_1\rangle_{\mathcal{H}_1}|^2 |\langle a_2|\psi_2\rangle_{\mathcal{H}_2}|^2 \\ &= Prob(A_1 = a_1; |\psi_1\rangle) \cdot Prob(A_2 = a_2; |\psi_2\rangle) \end{aligned} \qquad (۳۳)$$

۴) حاصلضرب تانسوری به آسانی فضای هیلبرت یک الکترون با اسپین را بطور کامل می‌سازد. این فضا عبارت است از $L^2(\mathbb{R}^3) \otimes \mathbb{C}^2$. مثلاً الکترونی که در مکان X دارای اسپین بالا می‌باشد را می‌توان به صورت $|X\rangle|+\frac{1}{2}\rangle$ و وقتی اسپین رو به‌پایین است با $|X\rangle|-\frac{1}{2}\rangle$ نمایش داد. به‌شکل کلی‌تر فضای تانسوری فوق را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$\chi := \psi_1 \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \psi_2 \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \psi_1, \psi_2 \in L^2(\mathbb{R}^3) \qquad (۳۴)$$

۱۱ اندازه گیری تعمیم یافته یا غیر مستقیم

برای یک اندازه گیری تعمیم یافته ، فضای هیلبرت سیستم مورد نظر را به فضای حاصلضرب تانسوری $\mathcal{H}_\alpha \otimes \mathcal{H}_\beta$ گسترش می‌دهیم که $\mathcal{H}_\beta$ فضای هیلبرت یک سیستم کمکی (ancillary) است که در حالت اولیهٔ معینی قرار دارد

$$|\beta\rangle \in \mathcal{H}_\beta,$$

که در اینجا $\mathcal{H}_\beta$ یک فضای هیلبرت N_β بعدی است وسپس یک اندازه گیری مستقیم (متعامد) روی سیستم کمکی انجام می‌دهیم.
وضعیت کلی به صورت زیر است. فرض می‌کنیم حالت اولیهٔ سیستم قبل از اندازه‌گیری ρ باشد و آنرا با سیستم کمکی در برهم کنش قرار می دهیم، طوری که حالت ترکیبی را بتوان بصورت زیر نوشت

$$\rho \otimes |\beta\rangle\langle\beta| \in \mathcal{H}_\alpha \otimes \mathcal{H}_\beta.$$

حالت ترکیب تحت تأثیر یک برهم کنش با هامیلتونی $H_{int}(t)$ برای یک بازهٔ زمانی ثابت عبارت است از

$$U_t(\rho \otimes |\beta\rangle\langle\beta|)U_t^\dagger,$$

که در اینجا

$$U_t = \exp\Big[-\frac{i}{\hbar}\int_\circ^t dt' H_{int}(t')\Big]$$

در این لحظه برهم کنش قطع می‌شود و می توان کمکی را از سیستم جدا کرد. یک اندازه گیری متعامد روی سیستم کمکی که به‌کمک‌یک مجموعه از برافکنش های جزیی

$$\{P_m := \mathbb{I}_\alpha^s \otimes |m\rangle\langle m|;\ ۱ \leq m \leq M\}$$

انجام می‌شود دارای آمار زیر است

$$p(m) = Tr_S[\mathbb{I} \otimes P_m^\beta U_t(\rho \otimes |\beta\rangle\langle\beta|)U_t^\dagger \mathbb{I}^s \otimes P_m^\beta \qquad (۳۵)$$

منظور از Tr_S محاسبهٔ رد مربوط به حالت سیستم است؛ از اینرو حاصل عبارت فوق احتمال رفتن سیستم کمکی به حالت m را میدهد. پس از اندازه‌گیری حالت عبارت است از

$$\tilde{\rho} = \frac{\mathbb{I}^s \otimes P_m^\beta U_t(\rho \otimes |\beta\rangle\langle\beta|)U_t^\dagger \mathbb{I}^s \otimes P_m^\beta}{p(m)}. \qquad (۳۶)$$

توجه داریم مجموعهٔ $\{\mathbb{I}^s \otimes \mathbf{P}_m^\beta\}$ یک مجموعهٔ کامل روی فضای حالت $\mathcal{H}_\alpha \otimes \mathcal{H}_\beta$ را

$$\begin{aligned}\sum_m (\mathbb{I}^s \otimes P_m^\beta) &= \mathbb{I}^s \otimes \Big(\sum_m P_m^\beta\Big) \\ &= \mathbb{I}^s \otimes \mathbb{I}^\beta = \mathbb{I}^{s\otimes\beta}\end{aligned}$$

تفکیک پذیری این عملگرها بروشنی نشان میدهد که این اندازه‌گیری می تواند فقط روی سیستم کمکی انجام گیرد.

ایدهٔاصلی در اینجا آن است که برهم‌کنش U_t بین سیستم و کمکی بهم‌تافتگی (entanglement) ایجاد میکند، طوری که حالتهای آنها همبسته (correlated) می‌شوند.
مثال. فرض می کنیم

$$U_t \equiv \mathrm{C}_{S\beta} = |0_S\rangle\langle 0_S| \otimes \mathbb{I}^\beta + |1_S\rangle\langle 1_S| \otimes (|1_\beta\rangle\langle 0_\beta| + |0_\beta\rangle\langle 1_\beta|),$$

یک برهم کنش بین دو سیستم کوانتومی دوبعدی باشد. اگر سیستم در حالت

$$|\Psi_S\rangle = c_\circ|0_S\rangle + c_1|1_S\rangle,$$

باشد و قرار دهیم $|\beta\rangle = |0_\beta\rangle$ آنگاه دنبالهٔ زیر را داریم

$$\begin{aligned} |\Psi_S\rangle &\mapsto |\Psi_S\rangle \otimes |0_\beta\rangle \\ &\mapsto \mathrm{C}_{S\beta}|\Psi_S\rangle \otimes |0_\beta\rangle \\ &= c_\circ|0_S\rangle \otimes |0_\beta\rangle + c_1|1_S\rangle \otimes |1_\beta\rangle, \end{aligned}$$

یا برحسب عملگر چگالی

$$\begin{aligned} \rho &= |\Psi_S\rangle\langle\Psi_S| \\ &\mapsto |\Psi_S\rangle\langle\Psi_S| \otimes |0_\beta\rangle\langle 0_\beta| \\ &\mapsto \mathrm{C}_{S\beta}|\Psi_S\rangle\langle\Psi_S| \otimes |0_\beta\rangle\langle 0_\beta|\mathrm{C}^\dagger_{S\beta} \\ &= (c_\circ|0_S\rangle \otimes |0_\beta\rangle + c_1|1_S\rangle \otimes |1_\beta\rangle)(c_\circ^*\langle 0_S| \otimes \langle 0_\beta| + c_1^*\langle 1_S| \otimes \langle 1_\beta|). \end{aligned}$$

با گرفتن Tr_S مانند (۳۵) می توان احتمال یافتن سیستم کمکی در یکی از پایه‌های آن را بدست آورد:

$$\begin{aligned} p(\circ) &= |c_\circ|^2, \\ p(1) &= |c_1|^2. \end{aligned}$$

حال با استفاده از رابطهٔ (۳۶) می‌توان حالت سیستم را پس از اندازه‌گیری بدست آورد. بسادگی دیده می‌شود

$$\begin{aligned} \tilde{\rho} &= |0_S\rangle\langle 0_S| \otimes |0_\beta\rangle\langle 0_\beta|, \quad m = \circ \\ &= |1_S\rangle\langle 1_S| \otimes |1_\beta\rangle\langle 1_\beta|, \quad m = 1 \end{aligned}$$

یعنی حالت سیستم پس از اندازه‌گیری عبارت است از

$$\begin{aligned} |\tilde{\Psi}\rangle &= |0_S\rangle, \quad m = ۰ \\ &= |1_S\rangle, \quad m = ۱. \end{aligned} \tag{۳۷}$$

از اینرو این فرایند به یک اندازه‌گیری غیرمستقیم می‌انجامد که آمار آن و حالتهای پس از اندازه‌گیری با حالتهای یک اندازه‌گیری مستقیم روی حالتهای پایهٔ $\{|0_S\rangle, |1_S\rangle\}$ با هم یکسان‌اند. حال فرایند مشابهی را در نظر می‌گیریم،به این ترتیب که سیستم در حالت قبلی $|\Psi_S\rangle$، اما سیستم کمکی را در حالت زیر فرض می‌کنیم

$$|\beta\rangle = a_۰|0_\beta\rangle + a_۱|1_\beta\rangle. \tag{۳۸}$$

از اینرو

$$\begin{aligned} |\Psi_S\rangle &\mapsto |\Psi_S\rangle \otimes (a_۰|0_\beta\rangle + a_۱|1_\beta\rangle) \\ &\mapsto \mathrm{C}_{S\beta}(c_۰a_۰|0_S\rangle \otimes |0_\beta\rangle + c_۰a_۱|0_S\rangle \otimes |1_\beta\rangle + c_۱a_۰|1_S\rangle \otimes |0_\beta\rangle + c_۱a_۱|1_S\rangle \otimes |1_\beta\rangle) \\ &= c_۰a_۰|0_S\rangle \otimes |0_\beta\rangle + c_۰a_۱|0_S\rangle \otimes |1_\beta\rangle + c_۱a_۰|1_S\rangle \otimes |1_\beta\rangle + c_۱a_۱|1_S\rangle \otimes |0_\beta\rangle \\ &= (c_۰a_۰|0_S\rangle + c_۱a_۱|1_S\rangle) \otimes |0_\beta\rangle + (c_۰a_۱|0_S\rangle + c_۱a_۰|1_S\rangle) \otimes |1_\beta\rangle \end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned} p(۰) &= |c_۰a_۰|0_S\rangle + c_۱a_۱|1_S\rangle|^۲ \\ &= |c_۰a_۰|^۲ + |c_۱a_۱|^۲, \\ p(۱) &= |c_۰a_۱|0_S\rangle + c_۱a_۰|1_S\rangle|^۲ \\ &= |c_۰a_۱|^۲ + |c_۱a_۰|^۲. \end{aligned}$$

می‌توان بسادگی دید

$$p(۰) + p(۱) = ۱. \tag{۳۹}$$

حالتهای پس از اندازه‌گیری عبارتند از

$$\begin{aligned} |\tilde{\Psi}\rangle &= \frac{c_۰a_۰|0_S\rangle + c_۱a_۱|1_S\rangle}{\sqrt{p(۰)}} \quad m = ۰, \\ &= \frac{c_۰a_۱|0_S\rangle + c_۱a_۰|1_S\rangle}{\sqrt{p(۱)}} \quad m = ۱. \end{aligned}$$

توجه داریم اگر $a_\circ = a_1 = 1/\sqrt{2}$ باشد، آنگاه $p(\circ) = 1/\sqrt{2} = p(1)$ است و احتمالات خروجی برابر و مستقل از $|\Psi_S\rangle$ میباشد، و هر دو حالت پس از اندازه‌گیری برابر با حالت قبل از اندازه‌گیری است. مورد قبلی، که اندازه گیری غیر مستقیم هم‌ارز با یک اندازه‌گیری مستقیم بود، حالت خاصی از مورد فعلی با $a_\circ = 1$ و $a_1 = \circ$ می باشد.
حال برهم کنش اصلاح شدهٔ زیر را درنظر می‌گیریم

$$\tilde{\mathrm{C}}_{S\beta} \equiv |1_S\rangle\langle 0_S| \otimes \mathbb{I}^\beta + |0_S\rangle\langle 1_S| \otimes (|1_\beta\rangle\langle 0_\beta| + |0_\beta\rangle\langle 1_\beta|)$$

می توان دید که این برهم کنش هنوز یکانی است . حالت سیستم و دستگاه کمکی عبارتند از

$$|\Psi_S\rangle = c_\circ|0_S\rangle + c_1|1_S\rangle, \qquad |\beta\rangle = a_\circ|0_\beta\rangle + a_1|1_\beta\rangle$$

این به نگاشت زیر منجر می‌شود

$$\begin{aligned}
|\Psi_S\rangle &\mapsto |\Psi_S\rangle \otimes (a_\circ|0_\beta\rangle + a_1|1_\beta\rangle) \\
&\mapsto \tilde{\mathrm{C}}_{S\beta}(c_\circ a_\circ|0_S\rangle \otimes |0_\beta\rangle + c_\circ a_1|0_S\rangle \otimes |1_\beta\rangle + c_1 a_\circ|1_S\rangle \otimes |0_\beta\rangle + c_1 a_1|1_S\rangle \otimes |1_\beta\rangle) \\
&= c_\circ a_\circ|1_S\rangle \otimes |0_\beta\rangle + c_\circ a_1|1_S\rangle \otimes |1_\beta\rangle + c_1 a_\circ|0_S\rangle \otimes |1_\beta\rangle + c_1 a_1|0_S\rangle \otimes |0_\beta\rangle \\
&= (c_1 a_1|0_S\rangle + c_\circ a_\circ|1_S\rangle) \otimes |0_\beta\rangle + (c_1 a_\circ|0_S\rangle + c_\circ a_1|1_S\rangle) \otimes |1_\beta\rangle,
\end{aligned}$$

در اینمورد داریم

$$\begin{aligned}
p(\circ) &= |c_\circ a_\circ|^2 + |c_1 a_1|^2, \\
p(1) &= |c_\circ a_1|^2 + |c_1 a_\circ|^2,
\end{aligned}$$

اما در اینجا

$$\begin{aligned}
|\tilde{\Psi}\rangle &= \frac{c_1 a_1|0_S\rangle + c_\circ a_\circ|1_S\rangle}{\sqrt{p(\circ)}} \qquad m = \circ, \\
&= \frac{c_1 a_\circ|0_S\rangle + c_\circ a_1|1_S\rangle}{\sqrt{p(1)}} \qquad m = 1.
\end{aligned}$$

اگر قرار دهیم $a_\circ = 1, \ a_1 = \circ$ آنگاه آماری شبیه به اندازه‌گیری مستقیم (۳۷) بدست می‌آید که فقط جای حالتهای $|0_S\rangle$ و $|1_S\rangle$ در حالت پس از اندازه‌گیری با هم عوض شده است.

نهایتاً برهم کنش زیر را در نظر می‌گیریم

$$\mathrm{C}_{\beta S} \equiv \mathbb{I}^S \otimes |0_\beta\rangle\langle 0_\beta| + (|1_S\rangle\langle 0_S| + |0_S\rangle\langle 1_S|) \otimes |1_\beta\rangle\langle 1_\beta|$$

با قرار دادن $|\beta\rangle = a_\circ|0_\beta\rangle + a_1|1_\beta\rangle$ داریم

$$\begin{aligned}
|\Psi_S\rangle &\mapsto |\Psi_S\rangle \otimes (a_\circ|0_\beta\rangle + a_1|1_\beta\rangle) \\
&\mapsto \mathrm{C}_{\beta S}(c_\circ a_\circ|0_S\rangle \otimes |0_\beta\rangle + c_\circ a_1|0_S\rangle \otimes |1_\beta\rangle + c_1 a_\circ|1_S\rangle \otimes |0_\beta\rangle + c_1 a_1|1_S\rangle \otimes |1_\beta\rangle) \\
&= c_\circ a_\circ|0_S\rangle \otimes |0_\beta\rangle + c_\circ a_1|1_S\rangle \otimes |1_\beta\rangle + c_1 a_\circ|1_S\rangle \otimes |0_\beta\rangle + c_1 a_1|0_S\rangle \otimes |1_\beta\rangle, \\
&= (c_\circ a_\circ|0_S\rangle + c_1 a_\circ|1_S\rangle) \otimes |0_\beta\rangle + (c_1 a_1|0_S\rangle + c_\circ a_1|1_S\rangle) \otimes |1_\beta\rangle,
\end{aligned}$$

به این ترتیب

$$\begin{aligned}
p(\circ) &= |c_\circ a_\circ|^2 + |c_1 a_\circ|^2, \\
&= |a_\circ|^2, \\
p(1) &= |c_\circ a_1|^2 + |c_1 a_1|^2, \\
&= |a_1|^2,
\end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned}
|\tilde{\Psi}\rangle &= \frac{c_\circ a_\circ|0_S\rangle + c_\circ a_\circ|1_S\rangle}{\sqrt{p(\circ)}} = c_\circ|0_S\rangle + c_1|1_S\rangle \qquad i = \circ, \\
&= \frac{c_1 a_1|0_S\rangle + c_\circ a_1|1_S\rangle}{\sqrt{p(1)}} = c_\circ|1_S\rangle + c_1|0_S\rangle \qquad i = 1.
\end{aligned}$$

بنابراین به وضعیتی می‌رسیم که در آن اندازه‌گیری مستقل از $|\Psi_s\rangle$ است اما، بسته به اندازه‌گیری، حالت سیستم پس از اندازه‌گیری یا با حالت آن قبل از اندازه‌گیری یکسان است و یا تحت تبدیل زیر چرخانده شده است

$$|0_S\rangle \mapsto |1_S\rangle, \qquad |1_S\rangle \mapsto |0_S\rangle.$$

انتخاب دامنه‌های $a_\circ$ و a_1 به طور مستقل، شباهت دو خروجی را تعیین میکند.
به طور خلاصه می بینیم اندازه‌گیری‌های غیر مستقیم را هر چند میتوان شبیه به اندازه‌گیری‌های مستقیم بکار برد، اما میتوان آنرا برای ساختن فرایندهای اندازه‌گیری که در آن تبدیل حالتهای

سیستم از قبل به بعد از اندازه‌گیری عامتر از یک برافکنش است، مورد استفاده قرارداد و با توجه به اطلاعات بدست آمده در مورد حالت سیستم قبل از اندازه‌گیری، فرایند اندازه گیری غیر مستقیم را مشخص نمود.

۱۲ کیوبیت ها و درگاه‌ها

یک **کیوبیت** یک سیستم کوانتومی است که در آن حالتهای **بولی** ۰ و ۱ توسط یک زوج از حالتهای کوانتومی بهنجار و دوبدو متعامد $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ نمایش داده می‌شوند.

این دو حالت یک پایهٔ محاسباتی می‌سازند و هر کیوبیت (حالت خالص) را می‌توان بصورت بر هم نهی $\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ نوشت که $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ و $|\alpha|^۲ + |\beta|^۲ = ۱$. یک کیوبیت عبارت است از یک سیستم میکروسکوپی مانند یک اتم، یک اسپین هسته‌ای، یا یک فوتون قطبیده.

مجموعه‌ای از n کیوبیت یک ثبّات کوانتومی (quantum register) به اندازهٔ n نامیده می‌شود. فرض می‌کنیم که اطلاعات در ثبات ها به صورت دودویی ذخیره می‌شود. برای مثال عدد ٦ توسط یک ثبات درحالت $|1\rangle \otimes |1\rangle \otimes |0\rangle$ نمایش داده می‌شود. در نمادگذاری فشرده: $|a\rangle$ حاصلضرب تانسوری $|a_{n-۱}\rangle \otimes |a_{n-۲}\rangle \cdots |a_۱\rangle|a_۰\rangle$ را نمایش می‌دهد، که در اینجا $a_i \in \{۰, ۱\}$ است و یک ثبات کوانتومی را نمایش می‌دهد که مقدار $a = ۲^۰ a_۰ + ۲^۱ a_۱ + \cdots + ۲^{n-۱} a_{n-۱}$ را نمایش می دهد. ۲^n حالت از این نوع وجود دارد که همهٔ رشته‌های دودویی بطول n یا اعداد ۰ تا $۲^n - ۱$ را نمایش می دهد و یک پایهٔ محاسباتی را تشکیل می‌دهند.

بنابراین یک ثبات کوانتومی با اندازهٔ سه میتواند اعدادی مانند ۳ یا ۷ را ذخیره کند

$$\begin{aligned} |0\rangle \otimes |1\rangle \otimes |1\rangle &\equiv |011\rangle \equiv |۳\rangle, \\ |1\rangle \otimes |1\rangle \otimes |1\rangle &\equiv |111\rangle \equiv |۷\rangle, \end{aligned} \tag{۴۰}$$

اما این ثبات می تواند دو عدد را نیز همزمان ذخیره کند. به این ترتیب که اولین کیوبیت را در یک برهم‌نهی بصورت $\frac{۱}{\sqrt{۲}}(|0\rangle + |1\rangle)$ قرار می‌دهیم و بدست می آوریم

$$\begin{aligned} \frac{۱}{\sqrt{۲}}(|0\rangle + |1\rangle) \otimes |1\rangle \otimes |1\rangle &\equiv \frac{۱}{\sqrt{۲}}(|011\rangle + |111\rangle), \\ &\equiv \frac{۱}{\sqrt{۲}}(|۳\rangle + |۷\rangle) \end{aligned} \tag{۴۱}$$

در واقع می‌توان این ثبات را در برهمی نهی هر هشت عدد آماده سازی نمود؛ کافی است هر کیوبیت را در برهم نهی $\frac{۱}{\sqrt{۲}}(|0\rangle + |1\rangle)$ قرار داد. نتیجه می شود

$$\frac{۱}{\sqrt{۲}}(|0\rangle + |1\rangle) \otimes \frac{۱}{\sqrt{۲}}(|0\rangle + |1\rangle) \otimes \frac{۱}{\sqrt{۲}}(|0\rangle + |1\rangle)$$

که با صرفنظر از ثابت $۲^{-۳/۲}$، می‌توان آنرا بصورت دودویی نوشت

$$|000\rangle + |001\rangle + |010\rangle + |011\rangle + |100\rangle + |101\rangle + |110\rangle + |111\rangle$$

یا بسادگی

$$\sum_{x=0}^{7} |x\rangle.$$

همانطور که در بخش قبل و در بالا دیدیم می توان کیوبیت ها را از طریق یک تبدیل یکانی دستکاری و حالت مورد نظر را ساخت.
یک **درگاه منطقی کوانتومی** (quantum logic gate) دستگاهی است که یک عمل یکانی روی یک کیوبیت مشخص شده در یک دورهٔ زمانی ثابت انجام می‌دهد و یک **شبکهٔ کوانتومی** دستگاهی شامل مجموعه‌ای از درگاه‌های منطقی کوانتومی است که مراحل محاسبات آنها در زمان هماهنگ شده‌اند. خروجی یک درگاه به ورودی دیگری متصل شده است. **اندازهٔ** (size) یک شبکه تعداد درگاه‌هایی است که در شبکه وجود دارد.
معمول‌ترین درگاه کوانتومی **درگاه هادامارد** (Hadamard gate) است که روی یک تک کیوبیت یک تبدیل یکانی H انجام می‌دهد و بصورت زیر تعریف می‌شود

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad |x\rangle \to \square^H \to (-1)^x|x\rangle + |1-x\rangle \tag{42}$$

در اینجا

$$|x\rangle = \Big[|0\rangle \ \text{یا} \ |1\rangle\Big] \equiv \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \ \text{یا} \ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right]$$

و می توان H را بصورت زیر در نظر گرفت

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big[|0\rangle\langle 0| + |0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1|\Big]$$

درگاه تک کیوبیت دیگر **درگاه جابجایی فاز** ϕ (phase shift gate) است که بصورت زیر تعریف می شود

$$|0\rangle \mapsto |0\rangle, \qquad |1\rangle \mapsto e^{i\phi}|1\rangle$$

و به‌شکل ماتریسی

$$\phi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\phi} \end{pmatrix}, \qquad |x\rangle \to \bullet^{\phi} \to e^{ix\phi}|x\rangle$$

درگاه هادامارد و درگاه فاز را می‌توان ترکیب کرد تا شبکه‌ای با اندازهٔ ۴ را ساخت که عامترین حالت های خالص یک تک کیوبیت را (با صرفنظر از یک فاز $e^{i\theta}$) تولید می کنند

$$|0\rangle \to \square^H \to \bullet^{2\theta} \to \square^H \to \bullet^{\frac{\pi}{2}+\phi} \to \cos\theta|0\rangle + e^{i\phi}\sin\theta|1\rangle.$$

در نتیجه درگاه‌های هادامارد و فاز برای ساختن هر عمل یکانی روی یک تک کیوبیت کافی‌اند. بنابراین درگاه‌های هادامارد و درگاه‌های فازی را می‌توان بکاربرد برای آنکه حالت ورودی n کیوبیت $|0\rangle|0\rangle\cdots|0\rangle$ (که در واقع می تواند یک ثبات را نشان دهند) به هر حالتی مانند $|\psi_1\rangle|\psi_2\rangle\cdots|\psi_n\rangle$ تبدیل کرد، که در اینجا $|\psi_i\rangle$ بر هم نهی اختیاری از $|0\rangle$ و $|1\rangle$ است.

این حالتها **حالتهای حاصلضربی** یا **تفکیک پذیر**(separable) نامیده میشود. بطور کلی یک ثبات کوانتومی به‌اندازهٔ $n > 1$ را می‌توان در حالتهایی آماده کرد که تفکیک پذیر نیستند و به آنها حالتهای **درهم‌تافته** (entangled) می‌گویند. مثلاً برای $n = 2$ حالت

$$\alpha|00\rangle + \beta|01\rangle = |0\rangle\big(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle\big)$$

تفکیک پذیر است: $|\psi_1\rangle$ و $|\psi_2\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$.

در حالیکه حالت

$$\alpha|00\rangle + \beta|11\rangle \neq |\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle$$

در هم تافته‌اند $(\alpha, \beta \neq 0)$، زیرا نمی‌توان آنرا بصورت یک حاصلضرب تانسوری نوشت.

برای آنکه حالتهای درهم‌تافته‌ای از دو (یا بیشتر) کیوبیت بدست آوریم بایستی درگاه‌های کوانتومی را به درگاه‌های ۲—کیوبیتی گسترش دهیم. معمول ترین درگاه ۲—کیوبیتی C-NOT (Controlled-NOT) نامیده می شود و به‌آن XOR یا اندازه‌گیری (measurement) می‌نامند. این درگاه کیوبیت دوم (یا هدف یا کمکی) را می چرخاند اگر کیوبیت اول (یا کنترل یا سیستم) $|1\rangle$ باشد؛ اما اگر کیوبیت اول $|0\rangle$ باشد روی آن اثر نمی‌کند. این درگاه را با ماتریس یکانی زیر نمایش می‌دهیم

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{ccc} |x\rangle & \to & |x\rangle \\ |y\rangle & \to & |x \oplus y\rangle \end{array} \tag{۴۳}$$

که در اینجا: $x, y = 0$ یا ۱ و $\oplus$ جمع مدول ۲ را نشان می‌دهد. حال درگاه C-NOT را بکار می‌بریم؛ اگر کیوبیت دوم یا هدف در حالت $|0\rangle$ قرار داشته باشد، و اولین کیوبیت در یکی از حالتهای $|0\rangle$ یا $|1\rangle$ باشد، آنگاه حالت نهایی هدف (دستگاه کمکی) نسخه‌ای از کیوبیت اول میشود

$$|x\rangle|0\rangle \mapsto |x\rangle|x\rangle, \qquad x = 0, 1$$

ممکن است به‌نظر برسد که این درگاه می‌تواند برای نسخه‌برداری از برهم‌نهی‌هایی مانند $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ بکار رود به طوریکه برای هر $|\psi\rangle$ داشته‌باشیم

$$|\psi\rangle|0\rangle \mapsto |\psi\rangle|\psi\rangle \tag{۴۴}$$

اما چنین نیست! یکانی بودن C-NOT مستلزم آن است که این درگاه برهم نهی‌ها در کیوبیت اول (کنترل) را بصورت حالتهای در هم‌تافته‌ای از کنترل و هدف (یا سیستم و کمکی) تبدیل می‌کند. اگر کیوبیت کنترل در یک حالت برهم‌نهی $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$، با $(\alpha, \beta \neq 0)$، و هدف در $|0\rangle$ باشد، آنگاه C-NOT حالت درهم‌تافتهٔ زیر را تولید می‌کند

$$(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle)|0\rangle \mapsto \alpha|00\rangle + \beta|11\rangle$$

ازاینجا می توان نتیجه گرفت که ساختن یک ماشین شبیه ساز کوانتومی جهانی (universal quantum cloning machin) وجود ندارد. حتی نمی توان حالت کلی زیر بدست آورد

$$|\psi\rangle|0\rangle|W\rangle \mapsto |\psi\rangle|\psi\rangle|W'\rangle$$

که در اینجا $|W\rangle$ حالت بقیهٔ جهان و $|\psi\rangle$ یک حالت کوانتومی است. برای اثبات این امر دو حالت بهنجار $|\psi\rangle$ و $|\phi\rangle$ را در نظر می‌گیریم که یکسان نیستند $|\langle\phi|\psi\rangle| \neq 1$ و نیز متعامد نمی‌باشند: $\langle\phi|\psi\rangle \neq 0$ و ماشین شبیه ساز را روشن می‌کنیم

$$\begin{aligned} |\psi\rangle|0\rangle|W\rangle &\mapsto |\psi\rangle|\psi\rangle|W'\rangle \\ |\phi\rangle|0\rangle|W\rangle &\mapsto |\phi\rangle|\phi\rangle|W''\rangle \end{aligned} \tag{45}$$

چون این ماشین یک تبدیل یکانی اعمال می‌کند که حاصلضرب داخلی را حفظ می‌کند، بنابراین بایستی داشته باشیم

$$\langle\phi|\psi\rangle = \langle\phi|\psi\rangle^2 \langle W'|W''\rangle$$

بنابراین ۱ یا $|\langle\phi|\psi\rangle| = 0$ که با فرض اولیه در تناقض است. بنابراین حالتهای کیوبیتی بر خلاف حالتهای بیت‌های کلاسیک نمی‌توانند کاملاً شبیه‌سازی شوند. این چیزی است که به رمزنگاری کوانتومی (Quantum Criptography) منجر می‌شود.

درگاه دوکیوبیتی دیگری که معمول است، درگاه جابجایی فاز کنترل شده $B(\phi)$ است که به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$B(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{i\phi} \end{pmatrix} \qquad \left\{ \begin{array}{ll} |x\rangle & \to \bullet \to \\ |y\rangle & \to \bullet \to \end{array} \right\} e^{ixy\phi}|x\rangle|y\rangle \tag{46}$$

این ماتریس در پایهٔ محاسباتی $\{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\}$ نوشته‌شده‌است و دیاگرام روی طرف راست ساختار درگاه را نشان می‌دهد.
بطور کلی این درگاه‌های ۲—کیوبیتی کنترل شده همگی به‌شکل درگاه کنترل شدهٔ—U

(Controlled-U) هستند که U تبدیل یکانی یک تک کیوبیت است. درگاه C-U روی کیوبیت کمکی (هدف) یک تبدیل همانی اعمال می کند، اگر کیوبیت سیستم (کنترل) در حالت $|0\rangle$ باشد، اما اگر کیوبیت اولی یا کنترل در حالت $|1\rangle$ باشد، حالت هدف با U تبدیل می‌شود. از اینرو این درگاه حالت $|0\rangle|y\rangle$ تغییر نمی دهد ولی حالت $|1\rangle|y\rangle$ را به $|1\rangle U|y\rangle$ تبدیل می‌کند.

درگاه هادامارد، همهٔ درگاه‌های فازی و C-NOT تعداد نامحدودی از مجموعه درگاه‌های جهانی می‌سازند، یعنی اگر درگاه C-NOT به‌علاوهٔ درگاه هادامارد و همهٔ مجموعه‌های فازی در دسترس باشند، آنگاه هر عمل یکانی روی n-کیوبیت را می‌توان با تعداد محدود و معینی از این درگاه‌ها شبیه‌سازی کرد.
البته این تنها مجموعهٔ درگاه‌های جهانی نیست. در واقع تقریباً هر درگاه که بتواند با دو کیوبیت درهم‌تافته شود را می توان بصورت یک درگاه جهانی بکار برد.

مراجع

[1] J.Preskil, *Quantum Information and Computation*, California Institute of Technology, 1998.

[2] A. Eckert et al., in *Coherent atomic matter waves*, Springe 2001.

[3] C. J. Isham, *Lecture on Quantum theory*, Imperial College Press 1995.

[4] F. Scheck, *Theoretische Physik 2*, Springer 2000.