ماشین ریاضی‌تولید حالت های همدوس

رسول رکنی‌زاده

دانشگاه اصفهان—گروه فیزیک

چکیده

در این مقاله مروری خواهیم داشت بر سیر تعمیم هایی که در سال های اخیر به مفهوم و ساختار ریاضی حالت های همدوس داده شده است. خواهیم دید هر چند حالت های همدوس ابتدا برای سیستم دینامیکی خاصی مطرح گردیدند اما آنهارا می توان مستقل از هر سیستم دینامیکی در یک فضای هیلبرت مجرد توسط یک ماشین ریاضی تولید کرد و در مطالعهٔ بسیاری از ساختارهای ریاضی فیزیکی بکار برد.

۱ مقدمه

در سال ۱۹۲۶یعنی همان اوان فرمولبندی مکانیک کوانتومی، شرودینگر به مطالعهٔ حالت هایی پرداخت که میانگین یا مقدار چشم داشتی عملگر مکان دراین حالت ها از معادلهٔ کلاسیک تبعیت می کرد. اولین نمونهٔ حالت های همدوس در سیستم نوسانگر هماهنگ ساده کشف شد. در سال ۱۹۶۰ گلاوبر[۸] و کلاودر [۹] این حالت ها را برای مطالعهٔ رفتارهمدوس پرتوهای نوری گسیل شده ازلیزرهابکار بردند.

از آن به بعد حالت های همدوس تقریباً در همهٔ شاخه های مکانیک کوانتومی مانند اپتیک کوانتومی، فیزیک هسته ای، اتمی، حالت جامد و الکترودینامیک کوانتومی بکار رفتند. به خصوص در مسئلهٔ کوانتش، این حالت ها به عنوان واسطه ای بین مکانیک کلاسیک و کوانتومی مطرح گردیدند و اخیراً در مطالعهٔ نسبیت عام کوانتومی [۲۷] بکار رفته اند.

در سال ۱۹۷۲پریلوموف [۲۱] حالت های همدوس کانونیک (در نوسانگر هماهنگ)را به صورت حالت های حاصل از اثر نمایش کاهش ناپذیر گروه ویل —هایزنبرگ G_{WH} روی بردار پایه در فضای هیلبرت سیستم تعریف کرد و راه برای تعمیم مفهوم حالت های همدوس و معرفی ماشین ریاضی مولد آن هموار گردید. به این ترتیب به این پرسش که آیا نمایش های کاهش ناپذیر گروه های لی غیر از G_{WH} نیز منجر به تولید حالت های همدوس می شود، پاسخ مثبت داده شد. از آنجائیکه عموماًسیستم های فیزیکی دارای گروه تقارنی هستند، حالت های همدوس از نمایش کاهش ناپذیر این گروه در فضای هیلبرت سیستم بدست می آیند: $\mathcal{S} = \{\eta_g = U(g)\eta \mid g \in G\}$. به بیان دیگر حالت های همدوس عناصر مدارη تحت تأثیر نمایش کاهش ناپذیر (مربعاً انتگرال پذیر) $U(G)$ هستند.

در سال ۱۹۷۴ برزین [۵] با استفاده از نمایش فوک—بارگمن حالت های همدوس را در رابطه با فضای هیلبرت $\mathcal{H}_{hol}$ که بردارهای آن توابع هولومورفیک از نقاط یک چندگونای نشانده شده در $\mathbb{C}^n$ بود معرفی کرد. هر عنصر $\psi \in \mathcal{H}$ می تواند توسط نگاشت پیوستهٔ $\mathcal{H} \to \mathcal{H}_{hol}$ به صورت $\psi \mapsto \Psi(z)$ به عنصری در $\mathcal{H}_{hol}$ تبدیل شود که با توجه به قضیهٔ نمایش ریز(Riesz)می توان نوشت : $\Psi(z) = \langle \Phi_{\bar{z}} \mid \psi \rangle$. می توان نشان داد که $\{\Phi_{\bar{z}}\}$ خانواده ای از حالت های همدوس است که دارای دو ویژگی فوق کامل بودن و تفکیک واحد: $\int \mid \Phi_{\bar{z}} \rangle \langle \Phi_{\bar{z}} \mid d\nu(z, \bar{z}) = ۱$ می باشند. این شیوه در بنای حالت های همدوس مستقل از هر گونه ملاحظات مربوط به‌نظریهٔ گروه ها است. در واقع حالت های همدوس به عنوان یک ویژگی ذاتی فضای هیلبرت روی چند گوناهای مختلط که دارای ساختار کیلری (Kählerian) هستند مطرح می شوند.

گام بعدی در تعمیم مفهوم حالت های همدوس در سال ۱۹۷۷ توسط راونسلی [۷، ۲۳] برداشته شد. در این روش از ساختار ریاضی کلاف های تار بهره گیری می شود. حالت

های همدوس عبارتند از سطح مقطع های یک کلاف خطی‌روی یک چند گونای کیلری به عنوان فضای فاز کلاسیک که رفتار آنهاتحت تاثیر هومومورفیزم های یکانی ازسیمپلکتومورفیزم های فضای فاز تبعیت می کند. به این ترتیب حالت های همدوس به صورت بخش ذاتی بسیاری از ساختارهای ریاضی (بدون ملاحظهٔ دینامیک فیزیکی خاص) معرفی می گردد [۳].

ازدیگر تعمیم هایی که در سال های اخیر به مفهموم حالت های همدوس داده شده معرفی حالت های همدوس غیر خطی است [۱۵، ۱۸، ۱۹] . با معرفی این حالت ها جنبه های بسیار جالب و متنوع میدان تابشی مورد مطالعه قرار گرفته اند و به این ترتیب راه برای بررسی نظری بسیاری از پدیده های کوانتوم اپتیکی گشوده شده است. به خصوص دیده شد که حالت های همدوس استاندارد را می توان مثال خاصی از این حالت ها به حساب آورد. در این بررسی مروری سعی می شود ضمن معرفی مقدماتی حالت های همدوس به نکات اصلی تعمیم‌هایی که به حالت های همدوس داده شده است بپردازیم.

۲ حالت‌های همدوس کانونیک

ابتدا حالت های همدوس راطی مثال زیر معرفی می کنیم :
فرض میکنیم مجموعهٔ $\{\varphi_n\}$ها ویژه حالت‌های هامیلتونی نوسانگر یک بعدی باشند که با رابطهٔ زیر داده می‌شوند:

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{b^{1/2}} \frac{1}{\sqrt{\pi^{1/2} 2^n n!}} e^{-x^2/2b^2} H_n(x/b) \qquad (1)$$

که در آن $b = \sqrt{\hbar/m\omega}$. یک حالت دلخواه وابسته به زمان $\psi(x,t)$ رادرنظرمی گیریم. با توجه به کامل بودن مجموعهٔ $\{\varphi_n\}$ها چنین داریم:

$$\psi(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(t) \varphi_n(x) \qquad (2)$$

که‌دراینجا $c_n(t) = c_n(0) e^{-iE_n t/\hbar}$ و $E_n = (n + \frac{1}{2})\hbar\omega$.
با انتخاب عدد اختیاری $z(0) = re^{-i\phi(0)}$ ضرایب $c_n(0)$ رابه‌صورت زیر می نویسیم:

$$c_n(0) = (\frac{1}{\sqrt{n!}} z(0)^n) e^{-r^2/2}$$

به این ترتیب $\psi(x,t)$ در $t = 0$ بهنجار به یک است:

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n(0)|^2 = 1$$

اکنون فرض می کنیم $\phi(t) = \omega t + \phi(0)$، بنابراین داریم:

$$z(t) = re^{-i\phi(t)} = re^{[\omega t + \phi(0)]}$$

بنابراین:

$$\psi(x,t) = e^{-r^2/2} e^{-i\omega t/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n(t) \varphi_n(x)$$

آشکار است که اگر $r \neq 0$ آنگاه $\psi(x,t)$ ویژه‌حالت انرژی نیست، در حالی که برای $r \to 0$ حالت پایهٔ نوسانگر هماهنگ بدست می آید.

با نوشتن x و p بر حسب عملگرهای خلق ونابودی به صورت

$$x = \frac{b}{\sqrt{2}}(a + a^\dagger) \qquad\qquad p = \frac{\hbar}{b}\frac{i}{\sqrt{2}}(a^\dagger - a)$$

مقادیرچشم داشتی آنها چنین بدست آورد:

$$\langle x\rangle_\psi = rb\sqrt{2}\cos[\omega t + \phi(0)]$$

و

$$\langle p\rangle_\psi = \frac{\hbar\sqrt{2}}{b} r\sin[\omega t + \phi(0)]$$

از دو رابطهٔ بالا چنین برمی آید که مقادیرچشم داشتی $\omega\sqrt{m}\langle x\rangle$ و $\langle p\rangle/\sqrt{m}$ با سرعت زاویه‌ای ω روی دایره‌ای به‌شعاع $r\sqrt{2\hbar\omega}$ می‌چرخند:

$$\omega\sqrt{m}\langle x\rangle = r\sqrt{2\hbar\omega}\cos[\omega t + \phi(0)]$$

$$\frac{1}{\sqrt{m}}\langle p\rangle = r\sqrt{2\hbar\omega}\sin[\omega t + \phi(0)]$$

این معادلات به معادلات نوسانگرهماهنگ کلاسیک شباهت دارند به طوری که در فضای فاز x_{cl} و p_{cl} در معادلاتی شبیه به معادلات فوق صدق می‌کنند:

$$\omega\sqrt{m}x_{cl} = \sqrt{2E_{cl}}\cos[\omega t + \phi(0)]$$

$$\frac{1}{\sqrt{m}}p_{cl} = \sqrt{2E_{cl}}\sin[\omega t + \phi(0)]$$

بنابراین حالت $\psi(x,t)$ به ردهٔ حالتهای همدوس متعلق است؛ به بیان دیگروجه تسمیهٔاین حالتها تشابه رفتار آنها با رفتار سیستم کلاسیک است. یادآوری می‌شود، $\psi(x,t)$ به عنوان یک حالت کوانتوم‌مکانیکی دارای انرژی معینی نیست. احتمال آنکه در یک اندازه گیری انرژی E_n بدست آید، عبارت است از

$$\mathcal{W}(E_n) = \frac{r^{۲n} e^{-r^۲}}{n!}$$

به همین ترتیب اگر $(\Delta x) = \sqrt{\langle x^۲ \rangle - \langle x \rangle^۲}$ و $(\Delta p) = \sqrt{\langle p^۲ \rangle - \langle p \rangle^۲}$ را محاسبه کنیم آنگاه خواهیم داشت :

$$\Delta x = \frac{b}{\sqrt{۲}} \qquad \Delta x = \frac{\hbar}{b\sqrt{۲}}$$

$$\Delta x \Delta p = \frac{\hbar}{۲}$$

لذامشخصه های عمومی زیر برای حالتهای‌همدوس بدست می آید:

- (۱) Δx و Δp مستقل از زمانند.
- (۲) حاصل ضرب نا معینی های کوانتومی این حالت ها، رابطهٔ عدم قطعیت هایزنبرگ را کمینه می سازند.
- (۳) اگر $\psi(x, t = ۰)$ ویژه حالت a باشد، یعنی

$$a\psi(x,t) = z(۰)\psi(x,t) = re^{i\phi(۰)}\psi(x, t = ۰)$$

آنگاه $\psi(x,t)$ که در اثر عملگر تحول زمانی روی حالت $\psi(x, t = ۰)$ بدست می آید نیز ویژه حالت a می باشد. لذا اگر حالت سیستم در ابتدا همدوس باشد همواره همدوس می ماند.

- (۴) حالت های همدوس بر هم عمود نیستند یعنی $\langle z|z' \rangle \neq ۰$.

با توجه به اینکه حالت $\psi(x,t)$ با $z(t)$ مشخص میشود، می توان معادلهٔ ویژه مقداری فوق را به صورت زیر نوشت:

$$a|z\rangle = z|z\rangle$$

مسئله ای که در اینجا مطرح می شود این است که چگونه می توان حالتهای همدوس را بطور سیستماتیک از طریق یک ماشین ریاضی تولید نمود. برای این منظور عملگر یکانی زیر را معرفی می کنیم:

$$D(z) = e^{(za^\dagger - \bar{z}a)}$$

با اعمال این عملگرروی حالت پایه $|0\rangle$ می توان حالتهای همدوس نظیر $\psi(x,t)$ راتولید کرد:

$$\begin{aligned} |z\rangle &= D(z)|0\rangle \\ &= e^{-\frac{1}{2}|z|^2}\sum \frac{z^n}{n!}(a^\dagger)^n|0\rangle \end{aligned}$$

این حالتها را حالتهای همدوس کانونیک می نامند.

۳ روش نظریه گروهها برای تولید حالتهای همدوس

عملگرهای $\{a, a^\dagger, I\}$ را می توان به عنوان نمایش‌هایی از مولدهای جبر لی گروه ویل–هایزنبرگ G_{WH} در نظر گرفت. نمایشی از گروه ویل–هایزنبرگ به صورت زیر است:

$$T(p,q,t) = \exp i(pQ - qP + tI) = \exp(za^\dagger - \bar{z}a + itI) = e^{itI}D(z)$$

که در اینجا D همانند قبل به صورت $D(z,\bar{z}) = \exp(za^\dagger - \bar{z}a)$ تعریف می شود. قانون ترکیب این گروه را می توان از فرمول BCH بدست آورد. از این فرمول داریم:

$$e^A e^B = e^{\frac{1}{2}[A,B]}e^{A+B}$$

اگر $[A,[A,B]] = [B,[A,B]] = 0$. بنابراین:

$$T(p_1,q_1,t_1)\circ T(p_2,q_2,t_2) = T(p_1+p_2, q_1+q_2, t_1+t_2+\frac{1}{2}(p_1q_2-p_2q_1))$$

به این ترتیب با توجه به اینکه $z = q + ip$ آنگاه می توان عناصر گروه G_{WH} را به صورت $(t,z) \in S^1 \times \mathbb{C}$ نوشت که در اینجا $S^1 \simeq \mathbb{Z} = \{(t,0)\}$ مرکز این گروه است(یعنی مجموعهٔ همهٔ عناصری که با همهٔاعضاء گروه جابجامی شود). نمایش مرکز عبارت است از

$$T^{\lambda(t,0)} = e^{it\lambda}$$

که دراینجا $\lambda \neq 0$ یک عدد حقیقی است. برای $\lambda' \neq \lambda$، دونمایش T^λ و $T^{\lambda'}$ ناهم ارزند. برای یک λی معین همهٔ نمایش های کاهش ناپذیر یکانی گروه G_{WH} به طور یکانی هم ارزندوبه شکل

$$T^\lambda(t,z) = e^{i\lambda t}D^\lambda(z)$$

خواهندبود.

حال نمایش T^λ را در فضای هیلبرت $\mathcal{H}^\lambda$ در نظر می گیریم و فرض می کنیم $|0\rangle \in \mathcal{H}^\lambda$

که در اینجا $\langle ۰ = z \mid = \langle ۰ \mid$. مدار

$$\{\mid z\rangle = D(z)|۰\rangle | z \in \mathbb{C} \simeq \frac{G_{WH}}{\mathbb{Z}}\}$$

یک خانواده از حالت های همدوس است . می توان اثبات کرد که برای هر بردار $\eta \in \mathcal{H}$ که بطور مناسب بهنجار شده باشد مجموعهٔ $\{\eta_z = D^{\lambda}(z)\eta \mid z \in G_{WH}/\mathbb{Z}\}$ نیز یک خانواده از حالت های همدوس است که دررابطه زیر صدق می کند[۱]

$$\int_{G_{WH}/\mathbb{Z}} \mid \eta_z\rangle\langle\eta_z \mid \frac{d^۲ z}{\pi} = ۱ \qquad (۳)$$

البته بایستی توجه داشت که حالت های همدوس کاملاً به انتخاب بردار پایه بستگی دارد.

بنا براین بنای حالت های همدوس به عنوان یک مسئله در نظریهٔ گروه ها تبدیل می شود.این ساختار رامی توان به روشنی در نمایش$-x$ مکانیک کوانتومی دید

$$D(z) \equiv D(p,q) = \exp\left[i(pQ - qP)\right]$$

$$(Qf)(x) = xf(x), \qquad (Pf)(x) = -i\frac{\partial f}{\partial x}, \qquad [Q,P] = iI$$

$$(D(q,p)f)(x) = e^{-ipq/۲}e^{ipx}f(x-q), \qquad x \in \mathbb{R}$$

به بیان دیگر حالت های همدوس توسط نقاط (q,p) در فضای همگن گروه ویل—هایزنبرگ $G_{WH}/\mathbb{Z}$ بر چسب زده می شوندواز اثر عملگر یکانی $D(p,q)$ ، که‌یک نمایش کاهش ناپذیرG_{WH} است، روی یک بردار ثابت بدست می آیند. معادلهٔ (۳)، تفکیک واحد، بیانی از مربعاً انتگرال پذیری D با توجه به فضای همگن $G_{WH}/\mathbb{Z}$ است .

حال می توان پرسیدکه آیا با استفاده از این ساختار می توان به تعمیمی از حالت های همدوس دست یافت و خانواده حالت های همدوس را با بکاربردن نمایش های کاهش ناپذیر گروه های دیگری غیراز گروه ویل — هایزنبرگ بنا نمود به طوری که روابط اساسی بالا را ارضا نماید. تولید حالت های همدوس از طریق نمایش های کاهش ناپذیر گروه های لی یک تعمیم توانمند از مفهوم حالت های همدوس است که در سال ۱۹۷۲ [۲۱] توسط پریلوموف ارائه گردید. در اینجا به ذکر مثالی در این خصوص می پردازیم. مولدهای جبر $\mathbf{su}(2)$ مربوط به تکانهٔ زاویه‌ای در روابط جابجایی زیر صدق می کنند:

$$[J_+, J_-] = ۲J_۰ \qquad (۴)$$

در این مورد می توانیم مشابه با آنچه در مورد گروه ویل—هایزنبرگ در بالا بیان کردیم، عمل کنیم. تنهابا این تفاوت که در اینجا حاصل رابطهٔ جابجاگری مولدهای جبر یک

عملگر است. به همین دلیل حالت های همدوسی که از کنش نمایش جبر روی حالت مرجع در فضای هیلبرت بدست می آیند با حالت های همدوسی که به عنوان ویژه حالت های عملگر پایین برنده تعریف می شوند متفاوت اند[۲۲].

حال تعریف می کنیم:

$$|\alpha\rangle = e^{(\alpha^* J_+ - \alpha J_-)}|J, M = -J\rangle \tag{۵}$$

در اینجا $|J, M\rangle$ ویژه حالت های تکانهٔ زاویه‌ای را نشان می دهد و $|J, M = -J\rangle$ به جای حالت پایهٔ نوسانگر هماهنگ، $|\circ\rangle$، قرارگرفته است. می توان عدد مختلط α را به صورت زیر با متغیرهای زاویه‌ای θ و ϕ مربوط کرد:

$$-\alpha = \frac{\theta}{۲} e^{i\phi}$$

در اینجا θ و ϕ زوایای قطبی و سمتی بردار یکهٔ $\hat{r}$ هستند که $\mathbf{r}$ مکان سیستم را نشان می دهد. بنابراین حالت های همدوس عبارتند از

$$\begin{aligned} |\alpha\rangle &= e^{-i\theta(-\sin\phi J_x + \cos\phi J_y)}|J, M = -J\rangle \\ &= e^{-i\theta(\hat{n}\cdot J)}|J, M = -J\rangle \end{aligned} \tag{۶}$$

که این نمایش چرخش به اندازهٔ θ حول محور $\hat{n}$ است که در اینجا $\hat{n} = (-\sin\phi, \cos\phi, \circ)$. به بیان دیگر حالت همدوس $|\alpha\rangle$ را می توان از طریق یک عملگر چرخش با زوایای اویلر $\phi, \theta, \circ$ توصیف نمود:

$$|\alpha\rangle \equiv |\alpha(\theta, \phi)\rangle = R(\phi, \theta, \circ)|J, M = -J\rangle. \tag{۷}$$

لذا حالت های همدوس از طریق کنش نمایش Dـماتریس های گروه چرخشی بدست می آیند:

$$\begin{aligned} |\alpha(\theta, \phi)\rangle &= \sum_{M=-J}^{+J} |J, M\rangle D^J(\phi, \theta, \circ)^* \\ &= \sum_{M=-J}^{+J} |J, M\rangle C_{J,M} (-۱)^{J+M} \left(\sin\frac{\theta}{۲}\right)^{J+M} \left(\cos\frac{\theta}{۲}\right)^{J-M} e^{-iM\phi} \\ &= \sum_{M=-J}^{+J} |J, M\rangle C_{J,M} \frac{(-۱)^{J+M} \left(\tan\frac{\theta}{۲}\right)^{J+M}}{\left(۱ + \tan^{۲}\frac{\theta}{۲}\right)^{J}} e^{-iM\phi}, \end{aligned} \tag{۸}$$

که در اینجا

$$C_{J,M} = \sqrt{\frac{(۲J)!}{(J+M)!(J-M)!}}$$

به همین ترتیب می توان برای هر گروه لی اختیاری حالت های همدوس تعمیم یافته مربوطه رامحاسبه کرد[۲۱، ۲۲].

۴ نمایش فوک—بارگمن

از طریق حالتهای‌همدوس می‌توان نمایش فوک—بارگمن را در مکانیک کوانتومی بدست آورد. فرض می کنیم $\mathcal{H}$ یک فضای هیلبرت دلخواه باشد، که عملگرهای a و $a^\dagger$ روی آن طوری تعریف می شوند که داشته باشیم

$$[a, a^\dagger] = ۱$$

علاوه بر این فرض می کنیم یک بردار بهنجار$|۰\rangle$ طوری‌وجود داشته باشد که $a|۰\rangle = ۰$ وبردارهای $\frac{1}{n!}(a^\dagger)^n|۰\rangle$ یک پایهٔ راست هنجار تشکیل دهند. چنین فضای هیلبرتی را فضای فوک می‌نامند. همهٔ فضاهای فوک بطوریکانی ایزومورف هستند(یعنی ازطریق این تبدیل عملگرهای a و$a^\dagger$ به عملگرهای متناظر با آنها تبدیل می‌شوندو $|۰\rangle$ نیز به $|۰\rangle$ در فضای دوم نگاشته می شود).
حال یک حالت دلخواه $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ را در نظر می گیریم. این حالت را می‌توان به طور یکتا توسط توابع $\psi(z) = \langle z|\psi\rangle$ تعیین کرد

$$|\psi\rangle = \frac{۱}{\pi}\int |z\rangle\langle z|\psi\rangle d^۲z$$

فرض می کنیم $|\psi\rangle = \sum c_n|n\rangle$ یک بردار بهنجار باشد؛ یعنی $۱ = \sum |c_n|^۲ = \langle\psi|\psi\rangle$. با توجه به تعریف $|z\rangle = \exp\left[-|z|^۲/۲\right]\sum \frac{z^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle$ داریم $|n\rangle \equiv |\varphi_n\rangle$. از این رو

$$\psi(z) = \sum c_n\varphi_n(z) \qquad \varphi_n(z) = \langle z|\varphi_n\rangle = \frac{z^n}{\sqrt{n!}}$$

$\psi(z)$ یک تابع تحلیلی کامل از متغیر مختلط z است زیرا سری فوق به دلیل آنکه $\sum |c_n|^۲ = ۱$ یک سری همگرا ست و

$$\langle\psi|\psi\rangle = \frac{۱}{\pi}\int e^{-|z|^۲}|\psi(z)|^۲ d^۲z < \infty$$

وبرای هر دو تابع کامل $\psi_۱$ و $\psi_۲$ داریم

$$\langle\psi_۱|\psi_۲\rangle = \frac{۱}{\pi}\int e^{-|z|^۲}\psi_۱^*(z)\psi_۲(z) d^۲z < \infty$$

این تعریف، نمایش فوک—بارگمن از فضای $\mathcal{H}$ است که شامل ا همهٔ توابع تحلیلی تام از متغیر مختلط z است که شرط فوق را ارضا می‌کنند یعنی نسبت به سنجهٔ $e^{-|z|^۲}d^۲z$ مربعاً انتگرال‌پذیراند.

بسیاری ازروابط دراین نمایش ساده ترمی‌شوند؛ مثلاً :

$$|n\rangle \to \varphi_n(z) = \frac{z^n}{\sqrt{n!}}$$

$$a = \frac{d}{dz}, \qquad a^\dagger = z$$

حالت های همدوس دارای ویژگی های عمومی زیرند

- (۱) دو حالت همدوس بر هم عمود نیستند:

$$|\langle z|z'\rangle|^۲ = e^{-|z-z'|^۲}$$

- (۲) برای حالتهای همدوس رابطهٔ تفکیک واحد به شکل زیراست

$$\int |z\rangle\langle z|\frac{d^۲z}{\pi} = ۱$$

بنا بر این باتوجه به عدم تعامد آنها، حالتهای همدوس یک مجموعهٔ فوق کامل تشکیل می دهند:

$$|z'\rangle = \int |z\rangle\langle z|z'\rangle\frac{d^۲z}{\pi}$$

- (۳) تابع $K(z',z) = \langle z'|z\rangle$ یک کرنل بازیافت (reproducing) است، یعنی

$$f(z) = \int_{G_{WH}/\mathbb{Z}} K(z,\bar{\zeta})f(\zeta)\frac{d^۲z''}{\pi}$$

وبا توجه به اینکه $\mathcal{H}_K \ni \langle z|$ است:

$$K(z,z') = \int_{\mathbb{C}} K(z,z'')K(z'',z')\frac{d^۲z''}{\pi}$$

دیگر ویژگی های‌کرنل بازیافت در بخش بعدی خواهد آمد.

- (۴) با استفاده از ویژگی کرنل می توان نمایش فوک—بارگمن را به صورت زیر تعریف نمود. نگاشت

$$\mathcal{W}: \mathcal{H} \to L^۲(\mathbb{C}, \frac{d^۲z}{\pi}), \qquad (\mathcal{W}\psi)(z) = \langle z|\psi\rangle$$

یک نگاشت یکانی به گسترهٔآن یعنی $\mathcal{H}_K \subset L^2(\mathbb{C}, \frac{d^2z}{\pi})$ است. به ویژه $\mathcal{H}$ یک زیر فضای بسته $L^2(\mathbb{C}, \frac{d^2z}{\pi})$ است. به علاوه $\mathcal{H}_K$ را می توان با فضای توابعی که به شکل $\psi(z) = e^{-\frac{1}{2}|z|^2}f(z)$ هستند یکسان گرفت، که در اینجا f یک تابع تحلیلی روی تمام صفحهٔ z است.
نگاشت

$$P : \mathcal{H} \to \mathcal{H}_K, \qquad \psi \mapsto \psi(z) = \langle z|\psi\rangle$$

یک برافکنش قائم است، به طوری که $P^2 = 1$ و

$$\psi(z') = \int K(z, z')\psi(z')\frac{d^2z'}{\pi}.$$

از تعریف $\mathcal{W}$ نگاشت ارزیابی $\psi \mapsto \psi(z)$ یک نگاشت پیوسته است، که این همان نگاشت فوک—بارگمن از فضای توابع تحلیلی $\mathcal{H}_K$ است.

- ۵ نهایتاً بر اساس رابطهٔ $z = \frac{1}{\sqrt{2}}(q + ip)$ می توان صفحهٔ z را همان فضای فاز در نظر گرفت. به این ترتیب نمایش حالتهای همدوس در واقع نمودی از مکانیک کوانتومی روی فضای فاز است کهاین خود سرشت شبه کلاسیک حالتهای همدوس را نشان می‌دهد.

۵ حالت های همدوس غیر خطی

در فیزیک معمولاً ساختار خطی به عنوان حالت خاص یک ساختار غیر خطی عام در نظر گرفته می شود. از جمله تعمیم های که در سال های اخیر به حالت های همدوس داده شده آن است که این حالت هارامی توان به عنوان حالت خاصی از حالت های همدوس غیر خطی در نظرگرفت. در اینجا حالت های همدوس غیر خطی از تغییر شکل حالت های همدوس کانونیک به ترتیب زیر ساخته می شوند. در بخش های قبل دیدیم که چگونه از طریق یک جبر لی حالت های همدوس ساخته می شوند. در جبر لی روابط جابجایی بین هر دو مولد جبر یک ترکیب خطی از مولد های دیگر است. حال می پرسیم اگر جبری را در نظر بگیریم که حاصل روابط جابجایی یک ترکیب غیرخطی از مولد ها باشد، حالت های همدوس منتجه از آن چه شکلی دارد. هرچند به نظر می رسد که این تعمیم صرفاً به یک ساختار ریاضی منجر شود اما اخیراً اهمیت آن در مطالعهٔ ویژگی های آماری بعضی سیستم های کوانتوم مکانیکی مورد تاکید قرار گرفته است (ر.ک. [۱۸، ۱۹] و مراجع آنها).

در اینجا تغییر شکل جبر ویل—هایزنبرگ در نوسانگر هارمونیک را به اختصار مورد بررسی قرار می دهیم. تغییر شکل عملگرهای a و $a^\dagger$ را به صورت زیر در نظر می گیریم:

$$A = af(n) = f(n+1)a$$

$$A^{\dagger} \;=\; f^{\dagger}(n)a^{\dagger} = a^{\dagger}f^{\dagger}(n+۱) \qquad (۹)$$

در اینجا $n = a^{\dagger}a$ عملگر عددی است و به سادگی می توان نشان داد

$$[A, n] = A, \qquad [A^{\dagger}, n] = -A^{\dagger} \qquad (۱۰)$$

تابع f که یک تابع هموار است می تواند به یک پارامتر پیوسته λ وابسته باشد به گونه‌ای که برای مقدار خاصی از این پارامتر $A, A^{\dagger}$ به $a, a^{\dagger}$ تبدیل می شوند. با توجه به شکل عملگرهای خلق و نابودی استاندارد $a, a^{\dagger}$ یعنی

$$a = \sum_{n=۰}^{\infty} \sqrt{n}|n-۱\rangle\langle n|, \qquad a^{\dagger} = \sum_{n=۰}^{\infty} \sqrt{n}|n\rangle\langle n-۱| \qquad (۱۱)$$

شکل عملگرهای تغییر یافتهٔ $A, A^{\dagger}$ در فضای فوک عبارت است از:

$$A = \sum_{n=۰}^{\infty} \sqrt{n}f(n)|n-۱\rangle\langle n|, \qquad A^{\dagger} = \sum_{n=۰}^{\infty} \sqrt{n}f^{\dagger}(n)|n\rangle\langle n-۱| \qquad (۱۲)$$

و بدین ترتیب به سادگی جابجاگر $A, A^{\dagger}$ محاسبه می شود:

$$[A, A^{\dagger}] = (n+۱)f(n+۱)f^{\dagger}(n+۱) - nf(n)f^{\dagger}(n) \qquad (۱۳)$$

با توجه به استقلال رابطهٔ بالا از فاز f می توان f را حقیقی و غیر منفی در نظر گرفت، یعنی $f^{\dagger}(n) = f(n)$. شکل خاصی از تابع f موسوم به تغییر شکل q که به مفهوم نوسانگر q می انجامد [۶، ۱۴] عبارت است از

$$f(n) = \sqrt{\frac{\sinh \lambda n}{n \sinh \lambda}} \qquad (۱۴)$$

پیداست در حد $\lambda \to ۰$ f برابر یک است و نوسانگر q به نوسانگر استاندارد تبدیل می شود به منظور تعین ساختار ریاضی حالت های همدوس غیر خطی شیوهٔ متداول آن است که این حالت ها را به عنوان ویژه حالت های عملگر A در نظر بگیریم. فرض می کنیم $|z, f\rangle$ ویژه حالت A در یک فضای هیلبرت باشد طوری که داشته باشیم

$$A|z, f\rangle = z|z, f\rangle. \qquad (۱۵)$$

در اینجا z یک عدد مختلط دلخواه است و $|z, ۱\rangle$ همان حالت های همدوس کانونیک است که در بخش ۲ معرفی شدند. با محاسبات سرراست [۱۸، ۱۹] و باتوجه به بهنجارش $|z, f\rangle$ نمایش حالت های همدوس غیر خطی در فضای پیکر بندی به صورت زیر بدست می آید

$$\psi_{z,f}(x) = \langle x|z, f\rangle = \pi^{-۱/۴}N_{z,f}e^{-x^{۲}/۲}\sum_{n=۰}^{\infty}\left(\frac{z}{\sqrt{۲}}\right)^{n}\frac{۱}{n![f(n)]!}H_n(x) \qquad (۱۶)$$

که در اینجا $H_n(x)$ چند جمله ای های هرمیت هستند و

$$N_{z,\alpha}=\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|z|^{2n}}{n![f(n)!]^2}\right)^{-1/2}$$

و بنا به تعریف

$$[f(n)]!=f(0)f(1)\cdots f(n)$$

از جمله جنبه های جالب توجه حالت های همدوس غیر خطی، مطالعهٔ تحول زمانی این حالت‌ها است. می توان نشان داد [۱۸] که اگر سیستم ابتدا در حالت همدوس استاندارد باشد، اثر غیرخطییت f باعث تحول سیستم به یک حالت همدوس غیر خطی می شود. در این وضعیت بسامد نوسانات سیستم تابعی از انرژی (دامنه) یا n خواهد بود. از جمله نتایج جالب توجهی که برای تابش الکترومغناطیسی متشکل از نوسانگرهای تغییر شکل یافته قابل پیش بینی است می توان به تغییر ویژگی های ترمودینامیکی (تابع پارش، آنتروپی، ظرفیت گرمایی و جز این ها)[۱۵]، تغییر شکل تابع توزیع پلانک و پدیداری اثر جابجایی به سمت آبی (افزایش بسامد تابش در اثر افزایش شدت تابش یا هم ارز آن، تغییر رنگ در اثر تغییر بسامد آن) [۱٦، ۱۷].

به طور خلاصه، ایدهٔ اساسی در رهیافت غیر خطی سازی جایگزینی پارامترهای ثابت مربوط به سیستم خطی، مانند جرم و بسامد، با توابعی از ثابت های حرکت همان سیستم، مانند انرژی و تکانهٔ زاویه‌ای، است. در واقع همین وابستگی به ثابت های حرکت است که به عنوان نوع خاصی از غیر خطی بودن تعبیر می شود. در مورد نوسانگر هماهنگ، حالت های همدوس غیر خطی پیامدی از این فرایند غیر خطی سازی به حساب می آید. از جمله ویژگی های این حالت ها آن است که حالت های مزبور غیر کلاسیک هستند و در مقایسه با حالت های همدوس استاندارد دارای نوفه های کوانتومی کاهش یافته ای می باشند[۱۹]. از اینرو این حالت هارا می توان در اندازه‌گیری های بسیار دقیق که در آنها لازم است سطح افتاخیزهای کوانتومی موجود در سیستم مورد مطالعه کمتر از حد استاندارد کوانتومی باشد به نحو مؤثری‌مورد استفاده قرار گیرد. گفتنی است گونه های مختلف حالت های همدوس را می توان در عمل توسط برخی مهم ترین سیستم های کوانتوم اپتیکی به ویژه سیستم برهم کنش اتم—تابش تولید کرد.

٦ کرنل برگمن و حالت های همدوس‌برزین

کرنل برگمن نقش مهمی در صورتبندی عام حالت های همدوس ایفامی کند. لذا در این بخش ویژگی های مهم کرنل برگمن مربوط به حالت های همدوس رابه اختصار مرور می کنیم .

فرض می کنیم $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ یک ناحیه (یک مجموعهٔ باز و کراندار) باشد. فضای برگمن به صورت زیر تعریف می شود

$$A^2(\Omega) = \{\Omega \text{ هولومورف روی } f \mid \int |f(z)|^2 e^{-\Psi(z,\bar{z})}\, d\nu(z,\bar{z}) = \|f\|_{\hbar}^2 < \infty\}. \quad (17)$$

$d\nu(z,\bar{z})$ اندازهٔ لبگ روی Ω است و به صورت زیر تعریف می شود

$$d\nu(z,\bar{z}) = g(z,\bar{z}) \frac{i dz \wedge d\bar{z}}{2\pi}$$

$\Psi(z,\bar{z})$ پتانسیل کیلر نامیده می شود که شکل آن به هندسهٔ Ω بستگی دارد و g متریک تعریف شده روی Ω است. به بیان دیگر می توان فضای برگمن با سنجهٔ زیررا تعریف کرد

$$d\mu(z,\bar{z}) := e^{-\Psi(z,\bar{z})} d\nu(z,\bar{z}) \quad (18)$$

می توان ثابت کرد[11] که فضای $A^2(\Omega)$ یک فضای هیلبرت با ضرب داخلی

$$\langle f, g\rangle = \int_{\Omega} f(z)\overline{g(z)}\, d\mu(z,\bar{z}) \quad (19)$$

است. برای هر عنصر $z \in \Omega$ نگاشت:

$$\varphi_z : f \mapsto f(z) \quad , \quad f \in A^2(\Omega) \quad (20)$$

یک تابعی خطی روی $A^2(\Omega)$ است. از اینرو بر اساس قضیه ریز(Riesz) یک عنصر $\Phi_z \in A^2(\Omega)$ طوری وجود دارد که φ_z را می توان از طریق حاصلضرب داخلی با Φ_z نمایش داد. اگر $f \in A^2(\Omega)$ آنگاه برای هر $z \in \Omega$ داریم :

$$\varphi_z(f) = f(z) = \langle f, \Phi_{\bar{z}}\rangle \quad (21)$$

در اینجا $\{\Phi_{\bar{z}}\}$ ها را حالت های همدوس برزین می نامیم. دلیل این نام گذاری را در ادامه خواهیم دید. حالت های همدوس برزین در واقع توابع تحلیلی روی Ω می باشند.

تعریف. کرنل برگمن عبارت است از

$$K(z,\bar{\zeta}) := \langle \Phi_{\bar{\zeta}}, \Phi_{\bar{z}}\rangle = \Phi_{\bar{\zeta}}(z) \ \ z, \zeta \in \Omega.$$

به دلیل وجود این کرنل فضای برگمن یک فضای هیلبرت کرنل دار نامیده می شود. این کرنل دارای ویژگی های زیر است:

- کرنل دارای ویژگی باز یافت است:

$$f(z) = \int K(z,\bar{\zeta}) f(\zeta) d\nu(\zeta), \quad \forall f \in A^2(\Omega) \quad (22)$$

با توجه به اینکه $\Phi_{\bar{z}}$ نیز به فضای برگمن متعلق است، لذا داریم:

$$\Phi_{\bar{z}}(z') = \int K(z', \bar{\zeta})\Phi_{\bar{z}}(\zeta)d\mu(\zeta, \bar{\zeta}) \qquad (۲۳)$$

به این ترتیب حالت های همدوس برزین $\{\Phi_{\bar{z}}\}$ دارای ویژگی تفکیک واحد هستند یعنی:

$$۱ = \int |\Phi_{\bar{z}}\rangle\langle\Phi_{\bar{z}}|d\mu(z, \bar{z}) \qquad (۲۴)$$

وبنابراین یک مجموعهٔ فوق کامل تشکیل می دهند.

- کرنل برگمن هرمیتی است

$$K(z, \bar{\zeta}) = \overline{K(\zeta, \bar{z})}, \qquad (۲۵)$$

- کرنل برگمن از طریق ویژگی های فوق به طور یکتا معین می شود، یعنی اگر $K'(z, \bar{\zeta})$ کرنل دیگری باشد،آنگاه می توان به سادگی نشان داد که $K'(z, \bar{\zeta}) = K(z, \bar{\zeta})$.

- از آنجاییکه $L^{۲}(\Omega)$ یک فضای هیلبرت جداشدنی است ، آنگاه زیر فضای هیلبرت آن نیز جدا شدنی است. آنگاه یک پایه‌راست هنجار $\{e_j\}_{j=۱}^{\infty}$ برای آن وجود دارد به طوری که برای یک زیر مجموعهٔ فشردهB از Ω داریم:

$$K(z, \bar{\zeta}) = \sum_j e_j(z)\overline{e_j(\zeta)} > ۰ \qquad z, \zeta \in B \qquad (۲۶)$$

تابع کرنل تحت نگاشت های تحلیلی ناوردا است، یعنی کرنل برگمن مستقل ازانتخاب پایه است.

- فرض می کنیم $\Omega_۱$ و $\Omega_۲$ ناحیه هایی در $\mathbb{C}^n$ باشند. اگر $h : \Omega_۱ \to \Omega_۲$ هولومورف دو سویه باشد، یعنی $h(z) = (h_۱(z), \cdots, h_n(z))$ که $h_۱, \cdots, h_n$ توابع هولومورف روی Ω هستند. آنگاه‌داریم

$$det J(h(z))K_{\Omega_۲}(h(z), \overline{h(\zeta)})det\overline{J(h(\zeta))} = K_{\Omega_۱}(z, \bar{\zeta}) \qquad (۲۷)$$

که در اینجا

$$J(h) = \frac{\partial(w_۱, \cdots, w_n)}{\partial(z_۱, \cdots, z_n)}, \ w_j = h_j(z)$$

ماتریس ژاکوبی هولومورف است.

• نگاشت

$$P : f \mapsto \int_\Omega K(.,\bar{\zeta}) f(\zeta)\, dV(\zeta,\bar{\zeta}) \qquad (۲۸)$$

تصویرگر متعامد از $L^۲(\Omega,\, dV)$ روی $A^۲(\Omega)$ است.

• برای هر $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$

$$g_{jk}(z) := \frac{\partial^۲}{\partial z_j \partial \bar{z}_k} \ln K(z,\bar{z}), \quad z \in \Omega \qquad (۲۹)$$

یک متریک هرمیتی روی Ω است.

به عنوان مثال هنگامی که Ω را برابر با $\mathbb{C} \equiv \mathbb{R}^۲$ در نظر بگیریم، پتانسیل کیلری برابراست با$\Psi(z,\bar{z}) = z\bar{z}$ ولذا مجدداً به نمایش فوک —بارگمن می رسیم که در بخش قبل به آن پرداخته شد، یعنی در اینجا $A^۲(\Omega) = \mathcal{H}_K$ است. به این ترتیب بدون در نظر گرفتن ملاحظات مربوط به گروه ها به تعمیمی از مفهوم حالت های همدوس می رسیم. در اینجا ماشین ریاضی تولید حالت های همدوس عبارت است از نگاشت ارزیابی زیر

$$E(z) : A^۲(\Omega) \to \mathbb{C}, \qquad E(z)f = f(z) \qquad (۳۰)$$

در واقع حالت های همدوس $\Phi_{\bar{z}}$ می توانند با استفاده از این اصل که نگاشت مزبور پیوسته است بدست آیند، یعنی می توان حالت همدوس را برداری تعریف کرد که برای یک بردار دلخواه $f \in A^۲(\Omega)$ داشته باشیم $f(z) = \langle f | \Phi_z \rangle$. این نحوه ساختن حالت های همدوس مربوط است به ویژگی های چندگوناهای مختلط که‌دارای ساختار کیلری می باشند[۵].

۷ نمایش هندسی حالت های همدوس

فرض می کنیم (M,ω) یک چند گونای کیلری فشرده و (L,h,∇) یک کلاف خطی روی M باشد که در اینجا ∇ یک همبندی (یا مشتق هموردا)روی کلاف، h یک حاصلضرب داخلی و L کلاف خطی است. فرض می کنیم $\pi : L \to M$ برافکنش کانونیک و $L_۰$ کلاف L بدون مقطع های صفر باشد. همچنین فرض می شود $q \in L_۰$ یک نقطه روی یک تار باشد. از آ نجائیکه نگاشت $\mathcal{H} \to L_x$، یعنی تحدید هر مقطع کلاف خطی به مقدار یک تار از طریق نگاشت $s \to s_x$، پیوسته است، بنابراین تابعی l_q روی $\mathcal{H}$ برای هر $q \in L_۰$ پیوسته است

$$s(\pi(q)) = l_q(s) \cdot q, \qquad s \in \{\text{مقاطع هولومورف}\}$$

اگر فضای مقاطع هولومورفیک راباC $\Gamma_{hol}(M,L) \to$ نشان دهیم خواهیم داشت

$$l_q : \Gamma_{hol}(M,L) \to \mathbb{C}$$

وبا استفاده از قضیه ریز داریم

$$l_q(s) = \langle e_q, s\rangle$$

چون $\pi(c.q) = \pi(q) = x$ و $c \in \mathbb{C}$، بنابراین

$$e_{cq} = c^{-1} e_q.$$

حال اگر $\tilde{\varphi}$ یک اتومورفیزم کلاف کوانتومی باشد که متناظر با یک هومورفیزم است که ساختار سیمپلکتیک M راحفظ می کند(سیمپلکتومورفیزم)، طوری که $\tilde{\varphi}$ به طور یکانی روی $\mathcal{H}$ اثر کند،آنگاه

$$(\tilde{\varphi}s)(z) = \tilde{\varphi}s(\varphi^{-1}z), \qquad z \in M, s \in \mathcal{H}$$

و می توان به آسانی نشان داد که

$$\tilde{\varphi}e_q = e_{\tilde{\varphi}(q)}$$

مثلاً اگر $\tilde{\varphi}$ یک تحول زمانی حالت ها و φ تحول کلاسیک متناظر با آن را نشان دهد، آنگاه رابطهٔ فوق بیان می کند که تحول زمانی حالت های کوانتومی e_q با تحول کلاسیک متناظر است.

۸ ساختار هندسی حالت های همدوس

یک سیستم کوانتومی دارای تقارن، دارای سه مؤلفه‌است: یک فضای هیلبرت $\mathcal{H}$، یک گروه لی G و یک نمایش کاهش ناپذیر یکانی U از G روی $\mathcal{H}$.
همانطور که در بالااشاره شدحالت های همدوس تعمیم یافته‌به عنوان عناصر Φ متعلق به یک مدار$-G$ از طریق یک حالت مرجع $\Phi_{\circ} \in \mathcal{H}$ و $||\Phi_{\circ}|| = ۱$ تعریف می شود .
زیر گروه G که عناصر آن حالت مرجع راباچشم پوشی از یک ضریب فازی ناوردامی گذارند زیر گروه پایدار ماکزیمال $\mathcal{K}$ نامیده می شودو برای آن داریم

$$k \cdot \Phi_{\circ} = \Phi_{\circ} e^{i\varphi(k)}$$

به این ترتیب حالت های همدوس یک زیر فضای چگال در فضای هیلبرت $\widetilde{\mathcal{H}} \subset \mathcal{H}$ تشکیل می دهند و فضای خارج قسمت G/K بافضای هیلبرت تصویری $\mathbb{P}(\widetilde{\mathcal{H}})$ ایزومورف می

شود. می توان نشان داد که $\mathbb{P}(\widetilde{\mathcal{H}})$ برای گروه های لی نیم ساده یک [۱۳، ۲۴] چندگونای کیلری است. با توجه به اینکه $\mathbb{P}(\mathcal{H})$ نیز یک چند گونای کیلری است که ساختار سیمپلکتیک آن از طریق دو فرمی فوبینی—استادی Ω_{FS} داده می شود، لذا ساختار سیمپلکتیک زیربرای $\mathbb{P}(\widetilde{\mathcal{H}})$ تعریف می شود

$$\Omega = \iota^* \Omega FS$$

که در اینجا$\iota : \mathbb{P}(\widetilde{\mathcal{H}}) \to \mathbb{P}(\mathcal{H})$ نگاشت نشانندگی چندگونای حالت های همدوس در فضای هیلبرت تصویری است.

$\mathbb{P}(\widetilde{\mathcal{H}})$ فضای فاز کوانتومی نامیده می شودکه به این ترتیب دارای ساختار هندسی مشابهی با فضای فاز کلاسیک می شود. این ساختار هندسی مناسب ترین واسطه بین مکانیک کلاسیک و کوانتومی در نظریه های کوانتش است [۲۴، ۲۵].

[1] S.T.Ali,et al, *Coherent States, Wavelets and their Generalizations*, Spriger 1999.

[2] V.Bargmann, *Comm. Pure.Appl.Math.***XIV***(1961)187-214.*

[3] S.Berceanu, *math.DG/9807072*

[4] S.Bergman, *The Kernel Function and Conformal Mapping* , Amer. Math. Soc., Providence, R.I. ,1970.

[5] F.A. Berezin, *Maht. USSR Izevestija***8***(1974) 1109-1165.*

[6] L.C.Biedenharn, J.Phys. A22,(1989)L873.

[7] M.Cahen, S.Gutt, J.H. Rawnsley, *J.Geom. Phys.* **7***(1990), no 1, 45-62.*

[8] R.J. Glauber, *Phys, Rev.***130***(1963)2529-2539; ibid.* **131 (1963)2766-2788**.

[9] J.R.Klauder, *J.Math. Phys.* **4***(1963)1055-1958; ibid. 1058-1073.*

[10] J.R. Klauder, *Coherent States, Applications in Physics and Mathematical Physics*World Scientific, Sigapore, 1985.

[11] S.G. Krantz,*Function Theory of several Complex Variables* , Pasific Grow, California,Sec. ed. 1992.

[12] N.P.Landsman, Mathematical Topics between Classical and Quantum Mechanics, Springer 1998.

[13] W.Lisiecki, Ann. Ins.Henri Poincare,**53**(1990)245-258.

[14] A.J. Macfarlane, J.Phys. A22,(1989)4581.

[15] V.Man'ko, et al., *Int. J. Mod. Phys. A8(1993)3577.*

[16] V.I. Man'ko,et al.,*Phys.Lett.A, 176(1993)173*

[17] V.I. Man'ko, G,M. Tino, *e-print quant-ph/9505001.*

[18] V.Man'ko, et al.,quantum-ph/0003125.

[19] M.H. Naderi, A study of quantum statistical properties of nonlinear coherent states,*Phd- Seminar(1) in Thoretical Physics, Uni of Isfahan, Dept. Physics, 2000*

[20] A.Odzjewicz, Commun.Math.Phys. **114**(1992), 577-597.

[21] A.M Perelomov, *Commun. Math. Phys.***26***(1972) 222-236*

[22] A.M Perelomov, *Generalized Coherent States and Their Application*, Springer-Verlag, Berlin, 1985.

[23] J.H. Rawnsley, *Quart. J. Math. Oxford(2)* **28***(1977)403-405.*

[24] R.Roknizadeh, *Geometrisierung der Quantenmechanik durch Berezin quantisierung*, Papierflieger 1999.

[25] R.Roknizadeh, H.D.Doebner, will be appeared in: Proceedings of Institue of Mathematics of NAS Okrain, 2001.

[۲۶] ر. رکنی زاده ، پذیرفته شده در مجلهٔ پژوهش فیزیک ایران

[27] H.Sahlmann, T.Thiemann, O. Winkler, e-print, gr-qc/0102038.

[28] W.M. Zhang, D.H. Feng, R.Gilmore, *Rev.Mod.Phys.* **62(1990)867-927**.